Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălţi
Catedra de matematică

CURS DE LECŢII LA

ANALIZA MATEMATICĂ I

Natalia Gaşiţoi

Bălţi, 2011

Cursul de lecţii la *Analiza matematică I* a fost recomandat pentru plasarea în biblioteca ştiinţifică a Universităţii de Stat „Alecu Russo" din Bălţi de către Catedra de matematică (procesul verbal nr.1 din 29.08.2011) şi Consiliul Ştiinţific al Facultăţii de Ştiinţe reale (procesul verbal nr.2 din 28.09.2011).

Recenzenţi:

1. *Ina Ciobanu,* doctor, lector superior, USB
2. *Liubov Zastînceanu,* doctor, lector superior, USB

Cuprins

Prefaţă

Cursul de faţă îşi propune prezentarea noţiunilor şi teoremelor de bază ale unităţii de curs Analiza Matematică I, prevăzut în planul de învăţământ pentru specialitatea 141.01 Matematica şi 141.02 Informatica din Universitatea de Stat „Alecu Russo" din Bălţi.

Expunerea presupune din partea cititorului cunoaşterea cursului liceal de matematică. Cursul de Analiză Matematică I se predă în semestrul I şi este o disciplină fundamentală pentru specialitatea nominalizată mai sus. El serveşte drept fundament pentru disciplinele Analiza matematică II şi Analiza matematică III şi pentru disciplinele de specialitate: ecuaţii diferenţiale, analiza funcţională, analiza complexă, topologie, ecuaţii cu derivate parţiale, teoria probabilităţilor.

Majoritatea teoremelor sunt însoţite de demonstraţii riguroase, menite să faciliteze înţelegerea şi aplicarea lor ulterioară. Noţiunile teoretice expuse sunt însoţite de numeroase exemple care au drept scop ilustrarea cazurilor tipice de aplicare a rezultatelor teoretice.

Din motivul că rezultatele prezentate în această lucrare sunt clasice (noutatea fiind în aranjamentul lor) nu am explicat sursa fiecărui subiect, referinţele fiind adunate la sfârşit. În nici un caz lipsa referinţelor bibliografice în text nu implică vreo pretenţie de originalitatea din partea autorului.

Capitolul 1

Introducere

1.1 Obiectul Analizei matematice. Mulţimi

1.1.1 Obiectul Analizei matematice

Analiza matematică este un domeniu al matematicii în care funcţiile şi generalizările lor sunt studiate folosind metoda limitelor. Noţiunea de limită este strâns legată de noţiunea de mărime infinit mică, de aceea putem spune că Analiza matematică studiază funcţiile folosind metoda infinit micilor.

Obiectul de studiu în Analiza matematică clasică este funcţia.

Analiza matematică, în sensul larg al acestui termen, cuprinde un domeniu vast al matematicii care include: calculul diferenţial, calculul integral, teoria funcţiilor de variabilă reală, teoria funcţiilor de variabilă complexă, teoria aproximaţiilor, teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare, teoria ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale, teoria ecuaţiilor integrale, geometria diferenţială, calculul variaţional, analiza funcţională şi alte discipline.

Totuşi, termenul Analiza matematică, de cele mai dese ori se foloseşte pentru a denumi doar *Bazele Analizei matematice,* care cuprind teoria numerelor reale, teoria limitelor, teoria seriilor, calculul diferenţial şi integral, teoria funcţiilor implicite, serii Fourier, integrale Fourier.

1.1.2 Simboluri logice. Mulţimi finite şi infinite

Textul matematic constă din formule matematice şi textul propriu-zis pentru care se foloseşte limba maternă. Anumite îmbinări de cuvinte, frecvent întâlnite au notaţii speciale.

Pe viitor vom folosi frecvent următorii operatori logici:

1) *negaţia*, notată cu *non* sau $\rceil$, în limbaj uzual citim *nu;*

2) *conjuncţia,* notată cu $\wedge$, în limbaj uzual citim *şi;*

3) *disjuncţia,* notată cu $\vee$, în limbaj uzual citim *sau;*

4) *implicaţia,* notată cu $\Rightarrow$, în limbaj uzual citim *rezultă că, implică;* iar notaţia $A \Rightarrow B$ se citeşte *dacă* A, *atunci* B;

5) *echivalenţa,* notată cu $\Leftrightarrow$, în limbaj uzual citim *atunci şi numai atunci* sau *dacă şi numai dacă.*

În afară de aceşti operatori logici, în cele ce urmează, vom folosi şi cuantificatorii:

1) *cuantificatorul universal,* notat $\forall$, în limbaj uzual citim *pentru orice* sau *pentru fiecare,* sau *pentru toţi* (acest semn reprezintă prima literă „răsturnată" a cuvântului englez All);

2) *cuantificatorul existenţial,* notat $\exists$, în limbaj uzual citim *există* (acest semn reprezintă prima literă „răsturnată" a cuvântului englez Exist).

Notaţia $\exists!$ se citeşte *există un singur*, iar îmbinarea de cuvinte *astfel încât* se va abrevia cu a.î.

> „*Meritul nemuritor al lui Georg Cantor este acela de a se fi hazardat în domeniul infinitului fără a se teme de lupta, interioară sau externă, nu numai cu paradoxurile imaginare, cu prejudecăţile larg răspândite, cu sentinţele filozofilor, dar şi cu opiniile exprimate de mari matematicieni. În acest mod el a creat un nou domeniu – teoria mulţimilor.*" F. Hausdorff

Conceptul de mulţime este unul de bază în matematică. Toate obiectele matematice se reduc, în ultima instanţă, la acest concept. Intuitiv se poate spune că o mulţime este: „*o colecţie de obiecte de natură oarecare, bine determinate şi bine distincte* " (Georg Cantor (1845 – 1918), creatorul teoriei mulţimilor, matematician german).

Cuvintele *colecţie, familie* şi *clasă* vor fi sinonime cu *mulţime.*

Obiectele care alcătuiesc mulţimea se numesc *elementele* sau *punctele* mulţimii.

Fie A o mulţime. Scriem $x \in A$ dacă x este un element al mulţimii A; în caz contrar $x \notin A$.

Unele mulţimi pot fi descrise enumerând elementele lor. Astfel $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este mulţimea ale cărei elemente sunt $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $\{x\}$ este mulţimea al cărei singur element este x. De regulă, mulţimile sunt descrise prin proprietăţile lor. Scriem

$$A = \{x : P(x)\} \quad \text{sau} \quad A = \{x \mid P(x)\}$$

pentru mulţimea tuturor elementelor x care au proprietatea P.

Exerciţii.

1. Enumăraţi elementele mulţimii $\{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z} : |x| + |y| = 2\}$.

2. Sunt oare adevărate următoarele afirmaţii:

a) $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{N}$ a.î. $x^2 + ax = 0$,

b) $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z}$ a.î. $x^2 + ax = 0$?

O mulţime care conţine un număr finit de elemente se numeşte *finită*, iar în caz contrar, *infinită*.

Mulţimea care nu are nici un element se numeşte *vidă* şi se notează $\emptyset$.

O mulţime A se numeşte *submulţime* a mulţimii B dacă fiecare element al mulţimii A este şi element al mulţimii B, adică

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B.$$

Se notează $A \subset B$ sau $B \supset A$.

Convenim că pentru orice mulţime A avem $\emptyset \subset A$.

1.1.3 Operaţii cu mulţimi

Definiţia 1.1. Mulţimile A şi B se numesc *egale* dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$. Se notează $A = B$.

Definiţia 1.2. Se numeşte *reuniunea* mulţimilor A şi B, mulţimea C, care constă din acele elemente care-i aparţin cel puţin uneia din mulţimile A sau B. Se notează $C = A \cup B$.

Astfel $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

Definiţia 1.3. Se numeşte *intersecţia* mulţimilor A şi B, mulţimea D, care constă din acele elemente care-i aparţin şi lui A şi lui B. Se notează $D = A \cap B$.

Astfel $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$.

Definiţia 1.4. Se numeşte *diferenţa* mulţimilor A şi B, mulţimea E, care constă din elementele lui A care nu sunt elemente ale lui B. Se notează $E = A \setminus B$.

Astfel $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}$.

Definiţia 1.5. Două mulţimi A şi B care nu au elemente comune (adică $A \cap B = \emptyset$) se numesc *disjuncte*.

Propoziţia 1.1. Fie mulţimile A, B şi C. Atunci avem:

1) proprietatea de idempotenţă:

$$A \cap A = A \cup A = A.$$

2) proprietatea de comutativitate:

$$A \cap B = B \cap A$$

şi

$$A \cup B = B \cup A.$$

3) proprietatea de asociativitate:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

şi

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

4) proprietatea de distributivitate:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

şi

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Observaţie. Analog se definesc mulţimile

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

şi

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.$$

Mai general, fiind dată o familie de mulţimi A_i, cu $i \in I$, unde I este o mulţime arbitrară de indici, putem considera

$$\bigcap_{i \in I} A_i,$$

mulţimea tuturor elementelor care aparţin tuturor mulţimilor A_i şi

$$\bigcup_{i \in I} A_i,$$

mulţimea tuturor elementelor care aparţin cel puţin unei mulţimi A_i.

Propoziţia 1.2 (Legile lui De Morgan). Pentru trei mulţimi A, B şi C avem:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

şi

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Definiţia 1.6. Se numeşte *diferenţa simetrică* a mulţimilor A şi B, mulţimea F, elementele căreia îi aparţin lui A, dar nu-i aparţin lui B şi-i aparţin lui B, dar nu-i aparţin lui A. Se notează $F = A \triangle B$.

Deci $A \triangle B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B \text{ sau } x \in B \text{ şi } x \notin A\}$.

Definiţia 1.7. Fie X o mulţime şi A o submulţime a lui X. Submulţimea lui X formată din acele elemente ce nu aparţin lui A se numeşte *complementara lui A în raport cu X*. Se notează $C_X A$.

Deci $C_X A = \{x \in X \mid x \notin A\}$.

Definiţia 1.8. Fie A şi B două mulţimi. Mulţimea ale cărei elemente sunt toate perechile ordonate (a, b), cu $a \in A$ şi $b \in B$ se numeşte *produsul cartezian* al mulţimilor A şi B (în această ordine). Se notează $A \times B$.

Deci $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}$.

Observaţie.

$$(a, b) = (a', b') \Longleftrightarrow a = a' \text{ şi } b = b'.$$

Exerciţii.

Aflaţi mulţimile $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$, dacă

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| + |x - 2| < 3\}$.

1.1.4 Relaţii binare. Relaţia de ordine. Relaţia de echivalenţă

Fie dată o mulţime nevidă A.

Definiţia 1.9. Se numeşte *relaţie binară* definită pe mulţimea nevidă A o submulţime nevidă R a produsului cartezian $A \times A$.

Dacă $(x, y) \in R$ vom scrie xRy şi vom citi: x se află în relaţia R cu y.

O relaţie binară R pe o mulţime nevidă A se numeşte:

– *reflexivă,* dacă xRx, pentru orice $x \in A$;

– *simetrică,* dacă $xRy \quad \Rightarrow \quad yRx$, pentru orice $x, y \in A$;

– *antisimetrică,* dacă $(xRy \text{ şi } yRx) \quad \Rightarrow \quad x = y$, pentru orice $x, y \in A$;

– *tranzitivă,* dacă $(xRy \text{ şi } yRz) \quad \Rightarrow \quad xRz$, pentru orice $x, y, z \in A$.

Definiţia 1.10. O relaţie binară pe mulţimea nevidă A se numeşte *relaţie de ordine pe A,* dacă ea este reflexivă, tranzitivă şi antisimetrică.

Observaţie. De multe ori relaţia de ordine R se notează prin $\leq$. Astfel, xRy se scrie sub forma $x \leq y$.

Definiţia 1.11. Un cuplu $(A, \leq)$, unde A este o mulţime nevidă, iar $\leq$ este o relaţie de ordine pe A se numeşte *mulţime ordonată.*

Definiţia 1.12. Muţimea ordonată $(A, \leq)$, se numeşte *total ordonată* dacă pentru orice $x, y \in A$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$ (adică orice două elemente sunt comparabile).

Definiţia 1.13. O relaţie R pe o mulţime nevidă A se numeşte *relaţie de echivalenţă* dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

Observaţie. De multe ori relaţia de echivalenţă R se notează prin $\sim$. Astfel xRy se scrie sub forma $x \sim y$.

Definiţia 1.14. Fie $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe A şi $x \in A$. Mulţimea

$$\widehat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\}$$

se numeşte *clasa de echivalenţă a lui x.*

Observaţie. Fie $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe A şi $x, y \in A$. Atunci $\widehat{x} = \widehat{y}$ sau $\widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset$.

Definiţia 1.15. Fie $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe A. Mulţimea

$$\{\widehat{x} \mid x \in A\},$$

notată $A/\sim$, se numeşte *mulţimea cât (sau factor) a lui A generată de* $\sim$.

Definiţia 1.16. Fie $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe A. Funcţia

$$p : A \to A/\sim,$$

dată de $p(x) = \widehat{x}$, pentru orice $x \in A$, se numeşte *surjecţia canonică generată de* $\sim$.

1.2 Noţiune generală de funcţie

1.2.1 Noţiune de funcţie. Diferite moduri de definire a funcţiei. Graficul funcţiei

Pentru matematicienii de acum un secol şi jumătate, cuvântul funcţie însemna, în mod obişnuit, o formulă, ca de exemplu

$$f(x) = x^3 + 2x - 5,$$

care asocia oricărui număr real un alt număr real.

Faptul că anumite formule, ca de exemplu

$$f(x) = \sqrt{x - 3},$$

nu asociau numere reale oricărui număr real, era binecunoscut, dar nu era considerat ca un motiv destul de solid pentru a extinde noţiunea de funcţie.

Întrebarea dacă asocierea

$$f(x) = |x|$$

este o „funcţie”, a născut controverse la acel timp, deoarece, în definitiv, definiţia lui $|x|$ este dată „pe bucăţi”, anume

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă} \quad x < 0. \end{cases}$$

Pe măsură ce matematica s-a dezvoltat, a devenit din ce în ce mai clar că cerinţa ca o funcţie să fie dată printr-o formulă este foarte restrictivă şi că o definiţie mai generală este necesară.

Iată o definiţie „provizorie” a noţiunii de funcţie:

Definiţia 1.17. Fie X şi Y două mulţimi. Vom numi *o funcţie f de la mulţimea X la mulţimea Y* o lege de corespondenţă conform căreia **fiecărui** element $x \in X$ i se asociază un **unic** element $y \in Y$.

Termenii *funcţie, aplicaţie, operator, corespondenţă, transformare* sau *reprezentare* sunt sinonime.

Să observăm că definiţia funcţiei de mai sus, are un punct slab, anume ambiguitatea expresiei „lege de corespondenţă”.

Am dori să eliminăm acest inconvenient prin definirea funcţiei numai în termeni de teoria mulţimilor. Această abordare are dezavantajul de a fi oarecum artificială, dar câştigul în ceea ce priveşte rigoarea este mult mai important comparativ cu orice altfel de dezavantaje.

Definiţia 1.18. Fie X şi Y două mulţimi. *O funcţie de la X la Y* este tripletul format cu aceste două mulţimi şi o submulţime f a lui $X \times Y$ cu proprietăţile următoare:

1) pentru orice $x \in X$ există $y \in Y$ astfel ca $(x, y) \in f$;

2) dacă pentru $x \in X$ şi $y, y' \in Y$ avem $(x, y) \in f$ şi $(x, y') \in f$, atunci $y = y'$.

Tripletul (X, Y, f) se mai notează

$$f : X \to Y \quad \text{sau} \quad X \xrightarrow{f} Y \quad \text{sau} \quad y = f(x), x \in X.$$

Mulţimea X se numeşte *domeniul de definiţie a funcţiei f* şi se notează $D(f)$.

Elementul y pe care legea f îl pune în corespondenţă elementului $x \in X$ se numeşte *imaginea elementului x prin f* sau *valoarea lui f în x* şi se notează $f(x)$. Elementul x se numeşte *variabila* sau *argumentul funcţiei.*

Mulţimea

$$E(f) = \{y \mid \exists x \in D(f) : f(x) = y\}$$

se numeşte *mulţimea valorilor aplicaţiei f* sau *codomeniul lui f.*

Exemple.

1) Fie X o mulţime. Aplicaţia $I_X : X \to X$, definită prin: $I_X(x) = x$, pentru fiecare $x \in X$ este numită *aplicaţia identică a mulţimii X.*

2) Funcţia *signum,* notată *sign* : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin:

$$sign(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă} \quad x < 0 \\ 0, & \text{dacă} \quad x = 0 \\ 1, & \text{dacă} \quad x > 0. \end{cases}$$

3) Funcţia lui Dirichlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Considerăm că funcţiile $f_1 : X_1 \to Y_1$ şi $f_2 : X_2 \to Y_2$ sunt *egale* atunci şi numai atunci când

1) $X_1 = X_2$,

2) $f_1(x) = f_2(x)$, pentru orice $x \in X_1$.

Se notează $f_1 = f_2$.

Definiţia 1.19. Fie $f : X \to Y$ şi $X_0 \subset X$. Definim funcţia $f_0 : X_0 \to Y$ punând

$$f_0(x) := f(x), \quad \text{pentru orice} \quad x \in X_0.$$

Funcţia f_0 se numeşte *restricţia funcţiei f la mulţimea X_0*, iar funcţia f se numeşte *prelungirea funcţiei f_0 la mulţimea X.*

Restricţia lui f la X_0 se notează cu simbolul $f\,|_{X_0}$.

Definiţia 1.20. Fie $f : X \to Y$ şi $A \subset X$, $B \subset Y$. *Imaginea mulţimii A prin funcţia f* se numeşte mulţimea

$$f(A) = \{y \mid \exists x \in A : f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Preimaginea sau *imaginea reciprocă a mulţimii B prin funcţia f* se numeşte mulţimea

$$f^{-1}(B) = \{x \mid \exists y \in B : f(x) = y\} = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Remarcăm că $f(A) \subset Y$, $f^{-1}(B) \subset X$.

Definiţia 1.21. Fie $f : X \to Y$. Vom numi *graficul funcţiei f,* mulţimea

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in X, y = f(x)\}.$$

1.2.2 Clasificarea funcţiilor: surjecţii, injecţii, bijecţii

Definiţia 1.22. Funcţia $f : X \to Y$ se numeşte *surjectivă* (sau aplicaţia mulţimii X **pe** Y) dacă imaginea lui X prin f, adică $f(X)$, coincide cu Y

$$f(X) = Y.$$

Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ nu este surjectvă, deoarece $y = -1$ nu are preimagine prin f, căci nu există aşa număr real x pătratul căruia ar fi egal cu -1. Însă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ este o surjecţie.

Definiţia 1.23. Funcţia $f : X \to Y$ se numeşte *injectivă* dacă pentru orice $x_1 \in X$ şi orice $x_2 \in X$:

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+1$ este injectivă. Într-adevăr, dacă $x_1 \neq x_2$ şi admitem prin absurd că $f(x_1) = f(x_2)$, obţinem

$$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2,$$

ceea ce contrazice ipoteza $x_1 \neq x_2$.

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ nu este injectivă, deoarece pentru $x_1 = -1$ şi $x_2 = 1$ avem $f(x_1) = f(x_2) = 1$.

Definiţia 1.24. Funcţia $f : X \to Y$ care este simultan surjectivă şi injectivă se numeşte *bijectivă*.

Exemplu. Funcţiile liniare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde a şi b sunt constante reale, sunt bijecţii.

Exerciţiu. Aflaţi $E(f)$ pentru funcţiile:
a) $X = Y = \mathbb{Z}: \quad f(x) = x + 1, x \in \mathbb{Z}$;
b) $X = Y = \mathbb{Z}: \quad f(x) = |x| + 1, x \in \mathbb{Z}$;
c) $X = Y = \mathbb{Z}: \quad f(x) = x^2 - 6x + 5, x \in \mathbb{Z}$.
Care din aceste funcţii sunt surjecţii? injecţii? bijecţii?

1.2.3 Compunerea funcţiilor. Funcţii inverse, parametrice şi implicite

Fie $f : X \to Y$, iar $g : Y \to Z$. Deoarece $f(X) \subset Y$, funcţia g, fiecărui element $f(x) \in f(X) \subset Y$ îi asociază un anumit element $g(f(x)) \in Z$. În aşa fel, fiecărui $x \in X$ conform legei $g \circ f$ i se pune în corespondenţă elementul $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $g(f(x)) \in Z$. Astfel este definită o funcţie nouă, care se numeşte compunerea sau superpoziţia funcţiilor f şi g.

Definiţia 1.25. Fie $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Funcţia $h : X \to Z$, definită de formula

$$h(x) = g(f(x)), \quad x \in X \quad (h = g \circ f)$$

se numeşte *funcţie compusă* sau *compunerea funcţiilor f şi g*.

De exemplu, funcţia

$$h = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

este compoziţia funcţiilor

$$f(x) = 1 - x^2, \quad x \in [-1, 1] \quad \text{şi} \quad g(y) = \sqrt{y}, \quad y \in [0, +\infty).$$

Definiţia 1.26. Fie $f : X \to Y$ este o funcţie bijectivă. În acest caz, fiecărui $y \in Y$ îi corespunde o singură preimagine x, pe care o vom nota cu $f^{-1}(y)$ şi aşa încât $f(x) = y$. Deci, este definită o funcţie $f^{-1} : Y \to X$ care se numeşte *funcţia inversă funcţiei f*.

Evident, că funcţia f este inversa funcţiei f^{-1}. De aceea funcţiile f şi f^{-1} sunt numite *reciproc inverse.* Pentru ele au loc relaţiile

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad (\forall y \in Y); \qquad f^{-1}(f(x)) = x \quad (\forall x \in X).$$

De exemplu, funcţia $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este bijectivă şi primeşte valori pe segmentul $[-1, 1]$. Deci pe $[-1, 1]$ este definită funcţia inversă funcţiei sinus şi anume funcţia $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Definiţia 1.27. Fie $\varphi : \Omega \to X$, $\psi : \Omega \to Y$, şi cel puţin una din aceste funcţii, de exemplu φ, este bijectivă. Atunci există funcţia inversă $\varphi^{-1} : X \to \Omega$, deci şi funcţia $\psi \circ \varphi^{-1} : X \to Y$. O funcţie astfel definită se numeşte *funcţie definită în mod parametric cu ajutorul funcţiilor* $\varphi : \Omega \to X$ *şi* $\psi : \Omega \to Y$, iar variabila din Ω se numeşte *parametru.*

De exemplu, egalităţile $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le \pi$ definesc parametric funcţia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [-a, a]$. Într-adevăr, întrucât $t \mapsto a\cos t$, $t \in [0, \pi]$ este o bijecţie $[0, \pi] \mapsto [-a, a]$, pentru fiecare $x \in [-a, a]$ din egalitatea $x = a\cos t$ aflăm valoarea unică $t = \arccos \frac{x}{a}$ care aparţine segmentului $[0, \pi]$. Înlocuind această valoare în a doua egalitate, obţinem

$$y = a\sin\left(\arccos\frac{x}{a}\right) = a\sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\frac{x}{a}\right)} = a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

adică $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [-a.a]$.

Definiţia 1.28. Fie că pe mulţimea $G = X \times Y$ este definită o funcţie $F : G \to \Delta$, unde mulţimea Δ conţine elementul nul. Admitem că există mulţimile $E \subset X$, $B \subset Y$ aşa încât pentru fiecare $x \in E$ fixat, ecuaţia $F(x, y) = 0$ are o singură soluţie $y \in B$. Atunci pe mulţimea E poate fi definită o funcţie $f : E \to B$, care fiecărui $x \in E$ îi pune în corespondenţă acea valoare $y \in B$, care pentru x indicat este soluţia ecuaţiei $F(x, y) = 0$.

Referitor la funcţia $y = f(x)$, $x \in E$, $y \in B$, astfel definită se spune că ea este definită *implicit* prin ecuaţia $F(x, y) = 0$.

De exemplu, ecuaţia

$$\frac{y - 2x^2}{y - 8} = 0$$

defineşte funcţia $y = 2x^2$, $x \neq \pm 2$.

Exerciţii.

1. Fie $y = \cos x$, $v = \ln y$, $u = \sqrt[3]{3 + v^2}$. Aflaţi $u \circ v \circ y$.
2. Aflaţi funcţia inversă funcţiei $y = 2^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Aflaţi expresia explicită pentru funcţia definită parametric

$$x = \frac{2at}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2at^2}{1 + t^2}, \quad 0 \le t < +\infty.$$

4. Aflaţi expresia explicită pentru funcţia $f : [\pi, 2\pi] \to \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definită implicit de ecuaţia

$$\cos x + \sin x = 0, \quad x \in [\pi, 2\pi], \quad y \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

1.3 Noţiunile de grup, inel şi corp

Definiţia 1.29. Un cuplu $(G, *)$ format cu o mulţime nevidă G şi cu o lege de compoziţie $*$ pe G (adică $x * y \in G$, pentru orice $x, y \in G$), se numeşte *grup* dacă sunt verificate următoarele axiome:

1)

$$x * (y * z) = (x * y) * z,$$

pentru orice $x, y, z \in G$;

2) există $e \in G$ astfel încât

$$e * x = x * e = x,$$

pentru orice $x \in G$;

3) pentru orice $x \in G$ există $x' \in G$ astfel încât

$$x' * x = x * x' = e.$$

Dacă în plus este verificată şi axioma

4)

$$x * y = y * x,$$

pentru orice $x, y \in G$, atunci grupul se numeşte *comutativ* (sau *abelian*).

Observaţie. Elementul e este unic determinat şi se numeşte *elementul neutru al grupului G*. Elementul x' este unic determinat şi poartă numele de *simetricul* (sau *inversul* sau *opusul*) elementului x.

Definiţia 1.30. O mulţime nevidă A, împreună cu două legi de compoziţie $+$ şi $\cdot$ (adică $x + y \in A$ şi $x \cdot y \in A$, pentru orice $x, y \in A$) se numeşte *inel* dacă sunt verificate următoarele axiome:

1) $(A, +)$ este grup abelian;

2) $(A, \cdot)$ este monoid, adică

2′)

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

pentru orice $x, y, z \in A$;

2″) există $1 \in A$ astfel încât

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x,$$

pentru orice $x \in A$.

3)

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

şi

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x,$$

pentru orice $x, y, z \in A$, adică înmulţirea este distributivă faţă de adunare la stânga şi la dreapta.

Observaţie.

1. Elementul neutru al grupului $(A, +)$, notat cu 0, se numeşte *elementul zero* al inelului, iar 1 (care este unic determinat) poartă numele de *elementul unitate* al inelului.

2. Dacă este satisfăcută şi axioma:

$$x \cdot y = y \cdot x,$$

pentru orice $x, y \in A$, atunci spunem că inelul A este *comutativ.*

3. Spunem că A este un *inel fără divizori ai lui zero* dacă pentru orice $x, y \in A$,

$$x \neq 0 \ \text{ şi } \ y \neq 0 \ \text{ implică } \ x \cdot y \neq 0.$$

Un inel comutativ cu cel puţin două elemente şi care nu are divizori ai lui zero se numeşte *domeniu de integritate.*

Definiţia 1.31. Un inel K se numeşte *corp* dacă $0 \neq 1$ şi dacă este satisfăcută următoarea axiomă:

pentru orice $x \in K \setminus \{0\}$ există $x^{-1} \in K$ astfel încât

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1,$$

adică orice element al lui K care este diferit de 0 este simetrizabil în raport cu înmulţirea.

Un corp se numeşte *comutativ* dacă înmulţirea sa este comutativă.

1.4 Mulţimea numerelor reale. Axiomatica mulţimii numerelor reale

Definiţia 1.32. Fie A o mulţime nevidă. Dacă fiecărei perechi de elemente $(x, y) \in A \times A$ conform unei anumite legi $*$ i se pune în corespondenţă elementul $z \in A$, atunci spunem că pe mulţimea A este definită *operaţia algebrică* $*$ şi se notează $z = x * y$.

Definiţia 1.33. O mulţime $\mathbb{R}$ se numeşte *mulţime de numere reale,* iar elementele ei se numesc *numere reale,* dacă ea este înzestrată cu două operaţii algebrice $+$ (adunarea) $((x, y) \to x + y)$ şi $\cdot$ (înmulţirea) $((x, y) \to x \cdot y)$ şi cu o relaţie de ordine notată „$\leq$”, care satisface următorul complex de axiome:

1. axiomele adunării;
2. axiomele înmulţirii;
3. axiomele de ordine;
4. axioma continuităţii.

1.4.1 Axiomele adunării, unele consecinţe ale lor

Se defineşte *operaţia de adunare*

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

care fiecărei perechi (x, y) de numere reale îi pune în corespondenţă numărul $z \in \mathbb{R}$ care se numeşte *suma* numerelor x, y şi au loc axiomele:

1. Adunarea este *comutativă*: $x + y = y + x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Adunarea este *asociativă*: $(x + y) + z = x + (y + z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

3. Există un număr numit *zero* şi notat cu 0 încât $x + 0 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4. Pentru orice număr $x \in \mathbb{R}$ există un număr notat cu $-x$ şi numit *număr opus* astfel încât $x + (-x) = 0$.

Consecinţe din axiomele adunării:

1. În mulţimea $\mathbb{R}$ zero este unic.

2. Pentru fiecare număr real numărul lui opus este unic.

3. Pentru orice pereche ordonată de numere x şi y numărul $x + (-y)$ se numeşte *diferenţa* numerelor x şi y şi se notează $x - y$.

1.4.2 Axiomele înmulţirii, unele consecinţe ale lor

Se defineşte *operaţia de înmulţire* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care fiecărei perechi de numere (x, y) îi pune în corespondenţă elementul $x \cdot y \in \mathbb{R}$ numit *produsul* lor şi sunt satisfăcute axiomele:

1. Înmulţirea este *comutativă*: $x \cdot y = y \cdot x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Înmulţirea este *asociativă*: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

3. Există un aşa număr numit *unitate* şi notat cu 1 încât $x \cdot 1 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4. Pentru orice $x \neq 0$ există un număr, numit *inversul lui* x, notat cu x^{-1} sau $\dfrac{1}{x}$ astfel încât $x \cdot x^{-1} = 1$.

5. Proprietatea de distributivitate a înmulţirii faţă de adunare $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Consecinţe din axiomele înmulţirii:

1. În mulţimea $\mathbb{R}$ numărul unitate este unic.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \quad \exists! x^{-1}$.

3. Pentru orice pereche ordonată de numere $x, y \in \mathbb{R}$ şi $y \neq 0$ numărul $x \cdot y^{-1}$ se numeşte *câtul* numerelor x şi y.

Consecinţe din axiomele de adunare şi înmulţire:

1. $\forall x \in \mathbb{R} : \quad x \cdot 0 = 0$.

2. $x \cdot y = 0 \quad \Rightarrow x = 0$ sau $y = 0$.

Exerciţiu. Demonstraţi consecinţele de mai sus.

Observaţie.

1. $(\mathbb{R}, +)$ este un grup abelian.

2. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este un corp comutativ.

1.4.3 Axiomele de ordine

Pe mulţimea $\mathbb{R}$ este definită o relaţie de ordine notată cu " $\leq$ ". Conform definiţiei relaţiei de ordine avem următoarele proprietăţi:

1. $x \leq x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. $(x \leq y \text{ şi } y \leq x) \Rightarrow x \leq z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.
3. $(x \leq y \text{ şi } y \leq x) \Rightarrow x = y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
4. Relaţia de ordine pe mulţimea $\mathbb{R}$ este *totală*, adică pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, avem fie $x \leq y$, fie $y \leq x$.
5. Dacă pentru $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$, atunci $x + z \leq y + z$ pentru orice $z \in \mathbb{R}$.
6. Dacă pentru $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ şi $0 \leq z$, atunci $x \cdot z \leq y \cdot z$.

1.4.4 Axioma continuităţii

Dacă X şi Y sunt submulţimi nevide din $\mathbb{R}$ şi satisfac condiţia:

$$\forall x \in X \text{ şi } \forall y \in Y : \quad x \leq y,$$

atunci în $\mathbb{R}$ există un astfel de număr $c \in \mathbb{R}$ încât

$$x \leq c \leq y, \quad \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

În mulţimea $\mathbb{R}$ are loc **proprietatea lui Arhimede:**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! n \in \mathbb{Z} \text{ a.î. } n \leq x < n + 1.$$

Acest număr n se numeşte *partea întreagă* a lui x şi se notează $[x]$.

Exemplu. $[1,2345] = 1$, $[-1,2345] = -2$.

Definiţia 1.34. Fie $x \in \mathbb{R}$. Vom numi *modulul* sau *valoarea absolută* a numărulul x, numărul

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Proprietăţi:

1. $|x| \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $|xy| = |x| \cdot |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$;
3. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$;
4. Fie $x \in \mathbb{R}$ şi $\varepsilon > 0$. Avem

$$|x| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$|x| > \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, +\infty)$$

5. $|x+y| \leq |x|+|y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ (*inegalitatea triunghiului*);

6. $|x-y| \geq ||x|-|y||$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Vom numi *distanţă* pe mulţimea $\mathbb{R}$ o funcţie d definită pe produsul $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cu valori reale nenegative care satisface următoarele condiţii:
1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$ pentru orice x şi $y \in \mathbb{R}$,
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ pentru toţi x, y şi $z \in \mathbb{R}$.

Uşor se verifică că funcţia $d(x,y) = |x-y|$, $x, y \in \mathbb{R}$ este o distanţă pe $\mathbb{R}$.

1.4.5 Dreapta reală

Să considerăm o axă, adică o dreaptă pe care sunt fixate un punct O numit origine, o unitate de măsură şi un sens. Fie $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ vectorul unitate. Notăm cu Δ mulţimea punctelor acestei axe şi observăm că Δ se poate organiza ca un grup în raport cu operaţia de adunare dată prin: dacă M, N sunt puncte din Δ, atunci $P = M + N$ se defineşte de relaţia vectorială $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$.

De asemenea pe Δ se introduce relaţia de ordine:

$$M \leq N \Longleftrightarrow \text{vectorii } \overrightarrow{MN} \text{ şi } \overrightarrow{u} \text{ au acelaşi sens.}$$

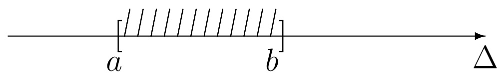
Admitem că Δ este un grup ordonat în care funcţionează proprietatea lui Arhimede şi în care orice submulţime nevidă majorată a sa are margine superioară.

În aceste condiţii, se arată că există o singură aplicaţie $\psi : \mathbb{R} \to \Delta$ care asociază oricărui număr real x, acel punct unic $M \in \Delta$ aşa ca $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}$, deci $\psi(x) = M$ şi în particular $\psi(0) = O$, $\psi(1) = A$.

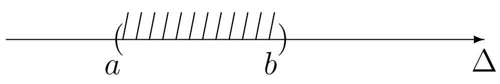
Aplicaţia ψ este o bijecţie, numită *bijecţia lui Descartes.* Prin bijecţia lui Descartes mulţimea $\mathbb{R}$ poate fi identificată cu mulţimea punctelor unei axe, ceea ce motivează denumirea de *dreaptă reală* ce se foloseşte pentru mulţimea $\mathbb{R}$ şi de *puncte* pentru numere reale.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ aşa ca $a < b$. Numim

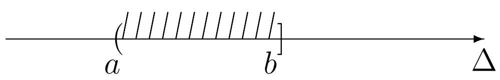
- *interval închis şi mărginit de origine a şi extremitate* b, notat cu $[a,b]$ mulţimea tuturor numerelor reale x aşa încât $a \leq x \leq b$.

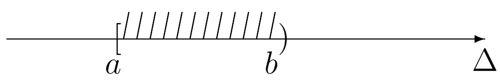


- *interval deschis de origine a şi extremitate b*, notat (a, b) mulţimea tuturor numerelor reale x aşa încât $a < x < b$.



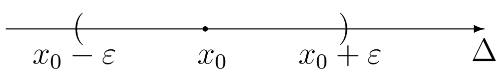
- *interval semi-deschis de origine a şi extremitate b*, deschis în a (resp. b), închis în b (resp. a), notat $(a, b]$ (resp. $[a, b)$) mulţimea tuturor numerelor reale x aşa încât $a < x \leq b$ (respectiv $a \leq x < b$).





1.4.6 Noţiune de vecinătate a unui punct

Definiţia 1.35. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Un interval deschis centrat în x_0 de forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ se numeşte *ε–vecinătatea punctului* x_0 şi se notează cu $U(x_0; \varepsilon)$.



Definiţia 1.36. Vom numi *vecinătate a punctului* $x_0 \in \mathbb{R}$ o mulţime $V \subset \mathbb{R}$ care conţine un interval deschis centrat în punctul x_0.

Exemplu. Intervalul $(-2, 3)$ este o vecinătate a punctului 1, deoarece el conţine intervalul deschis $(0, 2)$ centrat în 1.

Proprietatea de separaţie Hausdorff. *Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ şi $x \neq y$, atunci există vecinătăţi disjuncte ale lor.*

Exerciţiu. Demonstraţi proprietatea de separaţie Hausdorff.

Definiţia 1.37. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă. Un punct $x \in A$ se numeşte *interior* mulţimii A, dacă există o $\varepsilon-$vecinătate a acestui punct care în întregime se conţine în A.

Mulţimea tuturor punctelor interioare mulţimii A se numeşte *interiorul* lui A şi se notează $\overset{\circ}{A}$.

Dacă toate punctele mulţimii A sunt interioare, (adică $\overset{\circ}{A} = A$), atunci A se numeşte *mulţime deschisă.*

O mulţime A se numeşte *închisă,* dacă complementara ei este deschisă.

Exemplu. Un interval deschis (a,b) este mulţime deschisă, deoarece dacă $x_0 \in (a,b)$ şi $\varepsilon \leq \min\{x_0 - a, b - x_0\}$, atunci

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b).$$

Întreaga mulţime $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ este deschisă şi deci mulţimea vidă $\emptyset$ ($\emptyset = C_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$) este închisă. Totuşi, mulţimea vidă $\emptyset$ este totodată şi deschisă, pentru a nega aceasta este suficient de a considera că $\emptyset$ conţine cel puţin un punct care nu este interior, ceea ce este absurd, căci $\emptyset$ nu conţine puncte. Deci, $\emptyset$ este deschisă, iar $\mathbb{R} = C_{\mathbb{R}}\emptyset$ este închisă. Prin urmare, $\mathbb{R}$ şi $\emptyset$ sunt concomitent deschise şi închise. Acestea sunt singurele submulţimi ale lui $\mathbb{R}$ cu această proprietate.

Definiţia 1.38. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ se numeşte *punct de limită* sau *punct de acumulare* pentru mulţimea A, dacă în orice vecinătate a acestui punct se conţin puncte din mulţimea A diferite de x_0, adică dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate găsi cel puţin un punct $y \in A, y \neq x_0$ astfel încât $|y - x_0| < \varepsilon$.

Mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii A se numeşte *mulţime derivată* şi se notează cu A'.

Exemple.
1) Fie $A = [0,1]$. Mulţimea derivată este $A' = A$.
2) Pentru mulţimea $A = (0,1] \cup \{2\}$ mulţimea derivată este segmentul $[0,1]$.
3) Pentru mulţimea $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ mulţimea derivată este $A' = \{0\}$.
4) Mulţimea $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}\right\}$ nu are puncte de limită, $A' = \emptyset$.

Remarcă. Punctul de limită al unei mulţimi poate să aparţină sau să nu aparţină mulţimii.

Definiţia 1.39. Un punct $x \in A$ se numeşte *punct izolat al mulţimii* A dacă el nu este punct de acumulare pentru acestă mulţime, adică dacă există o vecinătate a lui în care nu se conţin alte puncte din A.

Definiţia 1.40. Un punct $x \in A$ se numeşte *punct frontieră al mulţimii* A dacă orice vecinătate a acestui punct conţine cel puţin un punct din A şi cel puţin un punct care nu este în A. Mulţimea tuturor punctelor frontieră ale lui A se numeşte *frontiera* lui A şi se notează cu ∂A.

Închiderea mulţimii A, notată cu $\overline{A}$ este

$$\overline{A} = A \cup \partial A.$$

Exemplu. Fie $A = (-\infty, -1] \cup (1,2) \cup \{3\}$. Atunci:
1) Mulţimea punctelor de limită ale lui A este $A' = (-\infty, -1] \cup [1,2]$.

2) $\partial A = \{-1, 1, 2, 3\}$ şi $\overline{A} = (-\infty, -1] \cup [1,2] \cup \{3\}$.

3) 3 este unicul punct izolat al lui A.

4) Exteriorul lui A este $(-1,1)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$.

Definiţia 1.41. Fie $x_0\in\mathbb{R}$. Mulţimea

$$\dot{U}\,(x_0,\varepsilon)=(x_0-\varepsilon,x_0)\cup(x_0,x_0+\varepsilon)$$

se numeşte *$\varepsilon-$vecinătatea perforată* (sau *găurită*) *a punctului x_0.*

Teorema 1.1.

a) Reuniunea mulţimilor deschise este deschisă.

b) Intersecţia mulţimilor închise este închisă.

Aceste afirmaţii se aplică la orice colecţii, finite sau infinite, de mulţimi deschise şi închise.

Exemplu. Intervalul închis $[a,b]\in\mathbb{R}$ este mulţime închisă, deoarece complementara lui este reuniunea mulţimilor deschise $(-\infty,a)$ şi $(b,+\infty)$.

Intervalul semideschis $(a,b]\subset\mathbb{R}$ nu este nici mulţime deschisă şi nici închisă. Deci, termenii „deschis" şi „închis" nu sunt opuse în acest context, spre deosebire de cazul vorbirii uzuale.

Se poate arăta că intersecţia unui număr finit de mulţimi deschise este deschisă şi reuniunea unui număr finit de mulţimi închise este închisă. Totuşi, intersecţia unei infinităţi de mulţimi deschise nu este neapărat deschisă şi reuniunea unei infinităţi de mulţimi închise nu este întotdeauna închisă.

1.4.7 Mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$

Vom conveni să adăugăm la mulţimea $\mathbb{R}$ două obiecte noi, notate cu $-\infty$ şi $+\infty$, care nu fac parte din $\mathbb{R}$, numite respectiv *minus infinit* şi *plus infinit.*

Vom nota prin $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ şi vom numi această mulţime *dreapta reală încheiată* sau *compactificată.*

Vom prelungi relaţia de ordine uzuală a mulţimii $\mathbb{R}$ la mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$, convenind că

$$-\infty<x,\quad x<+\infty,\quad -\infty<+\infty$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$. În felul acesta, mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$ devine total ordonată.

Definiţia 1.42. Numim *vecinătate a punctului* $+\infty$ orice mulţime $V\subset\overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval de forma $(a,+\infty]$ unde $a\in\overline{\mathbb{R}}$.

Definiţia 1.43. Numim *vecinătate a punctului* $-\infty$ orice mulţime $V\subset\overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval de forma $[-\infty,a)$ unde $a\in\overline{\mathbb{R}}$.

1.5 Mulţimi mărginite şi mulţimi nemărginite. Principiul segmentelor incluse

1.5.1 Element maxim şi element minim al unei mulţimi. Mulţimi mărginite

Definiţia 1.44. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Dacă există un număr $a \in A$, astfel încât

$$x \leq a, \forall x \in A,$$

atunci elementul a se numeşte *element maxim* al mulţimii A şi se notează $a = \max A$.

Definiţia 1.45. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Dacă există un număr $a \in A$, astfel încât

$$a \leq x, \forall x \in A,$$

atunci elementul a se numeşte *element minim* al mulţimii A şi se notează $a = \min A$.

Definiţia 1.46. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Dacă există un număr $d \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$x \leq d, \forall x \in A,$$

atunci mulţimea A se numeşte *mărginită superior* sau *majorată,* iar numărul d se numeşte *majorant* al mulţimii A.

Definiţia 1.47. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Dacă există un număr $c \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$c \leq x, \forall x \in A,$$

atunci mulţimea A se numeşte *mărginită inferior* sau *minorată,* iar numărul c se numeşte *minorant* al mulţimii A.

Definiţia 1.48. O mulţime mărginită şi superior şi inferior se numeşte *mulţime mărginită,* adică $\exists m, M \in \mathbb{R}$, a.î. $m \leq x \leq M$, $\forall x \in A$.

Echivalent, mulţimea A este mărginită dacă există o constantă pozitivă $K > 0$, astfel încât

$$|x| \leq K, \forall x \in A.$$

1.5.2 Marginea superioară şi marginea inferioară a unei mulţimi mărginite

Definiţia 1.49. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime majorată. Un majorant c^* al mulţimii A se numeşte *margine superioară* sau *supremum* al mulţimii A dacă c^* este *cel mai mic majorant al lui* A, adică pentru orice alt majorant d, avem $c^* \leq d$. Se notează $c^* = \sup A$.

Definiţia 1.50. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime minorată. Un minorant c_* al mulţimii A se numeşte *margine inferioară* sau *infimum* al mulţimii A dacă c_* este *cel mai mare minorant al lui* A, adică pentru orice alt minorant c, avem $c \leq c_*$. Se notează $c^* = \inf A$.

Observaţie. Fie A o mulţime majorată a lui $\mathbb{R}$, $c^* = \sup A$ şi $\varepsilon > 0$ un număr strict pozitiv. Deoarece $c^* - \varepsilon < c^*$ rezultă că $c^* - \varepsilon$ nu este majorant al lui A, deci există $a \in A$ cu $c^* - \varepsilon < a$ (şi evident $a \leq c^*$ deoarece c^* este un majorant al lui A), deci *în orice interval de forma* $(c^* - \varepsilon, c^*]$ *există elemente din* A.

Astfel obţinem afirmaţiile.

Teorema 1.2 (de caracterizare a marginii superioare a unei mulţimi). *Fie* A *o submulţime nevidă a lui* $\mathbb{R}$. *Un număr* c^* *este margine superioară a mulţimii* $A \subset \mathbb{R}$ *atunci şi numai atunci când*

1. $x \leq c^*$ *pentru orice* $x \in A$ *şi*
2. $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_\varepsilon \in A \quad$ *a.î.* $\quad x_\varepsilon > c^* - \varepsilon.$

Teorema 1.3 (de caracterizare a marginii inferioare a unei mulţimi). *Fie* A *o submulţime nevidă a lui* $\mathbb{R}$. *Un număr* c_* *este margine inferioară a mulţimii* $A \subset \mathbb{R}$ *atunci şi numai atunci când*

1. $c^* \leq x$ *pentru orice* $x \in A$ *şi*
2. $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_\varepsilon \in A \quad$ *a.î.* $\quad x_\varepsilon < c^* + \varepsilon.$

Axioma lui Cantor (marchează una dintre deosebirile esenţiale dintre $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}$). *Orice submulţime nevidă mărginită superior a lui* $\mathbb{R}$ *are margine superioară. Orice submulţime nevidă mărginită inferior a lui* $\mathbb{R}$ *are margine inferioară.*

Remarcă. Pentru submulţimile mulţimii $\mathbb{Q}$ afirmaţia de mai sus nu are loc.

Într-adevăr, de exemplu $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 3\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 3\}$. Avem $\sup A = \sqrt{3}$, $\sup B = \sqrt{3}$, dar $\sup A \in \mathbb{R}$, iar $\sup B \notin \mathbb{Q}$.

Exerciţiu. Reprezentaţi pe axa reală mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |5x - 7| < 10\}$. Există oare $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$?

1.5.3 Principiul segmentelor incluse (principiul Cauchy - Cantor)

Definiţia 1.51. Un sistem de segmente

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

aşa încât

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

se numeşte *sistem de segmente incluse.*

Definiţia 1.52. Fie dat un sistem de segmente $[a_n, b_n]$ $n = 1, 2, \ldots$. Vom spune că *lungimile segmentelor* $[a_n, b_n]$ *tind la* 0 cu creşterea lui $n = 1, 2, \ldots$, dacă pentru fiecare număr pozitiv $\varepsilon > 0$ există un aşa număr natural (rang) $N(\varepsilon)$ încât pentru toate numerele $n \geq N(\varepsilon)$ are loc inegalitatea $b_n - a_n < \varepsilon$.

Teorema 1.4 (Principiul segmentelor incluse Cauchy–Cantor). *Pentru orice sistem de segmente incluse $I_n = [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, lungimile cărora tind la 0, există un singur punct c comun tuturor segmentelor şirului.*

Demonstraţie. Să arătăm mai întâi existenţa unui punct comun tuturor segmentelor sistemului dat, iar apoi vom demonstra unicitatea lui.

Să construim mulţimile $A = \{a_m, m \in \mathbb{N}^*\}$ şi $B = \{b_n, n \in \mathbb{N}^*\}$. Observăm că

$$a_m \leq b_n, \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \text{şi} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Conform axiomei continuităţii se va găsi un punct c astfel încât $a_m \leq c \leq b_n$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. În particular, dacă $m = n$ obţinem

$$a_n \leq c \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{adică} \quad c \in [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Să demonstrăm unicitatea acestui punct. Cu acest scop admitem contrariul, adică că se va găsi cel puţin încă un punct $c' \neq c$ comun tuturor segmentelor sistemului. Şi fie $c < c'$.

Întrucât $a_n \leq c' \leq b_n$ şi $a_n \leq c \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$c' - c \leq b_n - a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.1}$$

Deoarece lungimile segmentelor $[a_n, b_n]$ tind la 0, pentru numărul pozitiv arbitrar (oricât de mic) ε se va găsi un segment $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ lungimea căruia va fi mai mică decât ε, adică $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$. Dar atunci, din (1.1) obţinem

$$c' - c \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon,$$

adică $c' - c < \varepsilon$.

Astfel am obţinut că numărul nenegativ $c' - c$ este mai mic decât orice număr pozitiv ε, ceea ce e posibil doar dacă $c' - c = 0$, sau $c' = c$. Dar aceasta contrazice condiţia $c' \neq c$ astfel presupunerea că punctul c nu este unic este falsă şi este adevărată afirmaţia teoremei.

□

Capitolul 2

Şiruri de numere reale

2.1 Şir numeric. Limita şirului numeric

2.1.1 Noţiune de şir numeric. Şiruri mărginite. Exemple

Definiţia 2.1. Se numeşte şir de numere reale o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Vom nota $f(n) = a_n$, unde n este *rangul* sau *locul* termenului a_n în şir. Termenul a_n se numeşte *termenul general* al şirului. Şirul

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

va fi notat pe scurt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau simplu (a_n).

Exemple.

1. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şirul $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ este şirul $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$

3. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = (-1)^n$ este şirul $1, -1, 1, -1, \ldots$

Definiţia 2.2. Şirul numeric $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte *mărginit* dacă se poate găsi o constantă pozitivă $M > 0$ aşa încât $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Deoarece

$$|a_n| \leq M \Longleftrightarrow a_n \in [-M, M],$$

şirul numeric $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit dacă toţi termenii lui se conţin într-un segment finit.

Exemple.

1. Şirurile $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt mărginite.

2. Şirul $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ este nemărginit.

2.1.2 Noţiune de limită a şirului numeric

Definiţia 2.3. Se spune că *şirul numeric* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limita* $a \in \mathbb{R}$ şi se scrie

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \text{sau} \quad a_n \to a, n \to \infty,$$

dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $N(\varepsilon)$ (dependent de ε) astfel încât pentru toţi termenii şirului a_n cu rangul $n \geq N(\varepsilon)$ are loc inegalitatea $|a_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{a.î.} \quad |a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Şirul numeric care are limită se numeşte *şir convergent.* Şirul numeric care nu are limită se numeşte *şir divergent.*

Observăm că

$$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \Leftrightarrow a_n \in U(a;\varepsilon).$$

Prin urmare, putem da o definiţie echivalentă celei de mai sus

Definiţia 2.4. Se spune că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are *limita* $a \in \mathbb{R}$ dacă orice interval deschis centrat în a conţine toţi termenii şirului, cu excepţia unui număr finit dintre ei.

Exemplu. Demonstraţi că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n-3}{2n+1} = 2.$$

Conform definiţiei limitei şirului pentru un număr $\varepsilon > 0$ arbitrar trebuie să găsim un rang $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât $\forall n > N(\varepsilon)$ să fie adevărată inegalitatea

$$\left|\frac{4n-3}{2n+1} - 2\right| < \varepsilon.$$

Vom rezolva ultima inegalitate în raport cu n.

$$\left|\frac{4n-3}{2n+1} - 2\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{4n-3-4n-2}{2n+1}\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{5}{2n+1} < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{5-\varepsilon}{2\varepsilon}.$$

Astfel dacă vom pune

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{5-\varepsilon}{2\varepsilon}\right] + 1,$$

atunci $\forall n \geq N(\varepsilon)$ va avea loc inegalitatea $\left|\frac{4n-3}{2n+1} - 2\right| < \varepsilon$ ceea ce conform definiţiei limitei înseamnă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-3}{2n+1} = 2.$

Dacă $\varepsilon = 0.1$, atunci $N(\varepsilon) = 25$, iar dacă $\varepsilon = 0.01$, atunci $N(\varepsilon) = 250$.

Din definiţia limitei şirului numeric rezultă cu uşurinţă următoarea afirmaţie.

Teorema 2.1. *Prin adăugarea sau prin eliminarea unui număr finit de termeni:*

i) un şir convergent rămâne convergent către aceeaşi limită;

ii) un şir divergent rămâne divergent.

2.1.3 Unicitatea limitei şirului numeric

Teorema 2.2. *Dacă un şir numeric are limită, atunci aceasta este unică.*

Demonstraţie. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir numeric. Admitem că acest şir are două limite diferite $a \neq b$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1(\varepsilon) \quad \text{a.î.}$$

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0, \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2(\varepsilon) \quad \text{a.î.}$$

$$|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.2}$$

Fie $N = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Atunci $\forall n \geq N(\varepsilon)$ inegalităţile (2.1) şi (2.2) au loc concomitent şi deci

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prin urmare pentru oricee număr pozitiv $\forall\varepsilon > 0$ are loc inegalitatea $|a-b| < \varepsilon$, ceea ce este posibil, doar dacă $a = b$. Contradicţia obţinută demonstrează teorema.

□

2.1.4 Mărginirea unui şir convergent

Teorema 2.3. *Orice şir numeric convergent este mărginit.*

Demonstraţie. Fie dat şirul convergent $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Atunci

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{a.î.} \quad |a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Fixăm numărul pozitiv ε, d.e. $\varepsilon = 1$. Observăm că

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < \varepsilon + |a| = 1 + |a| = M_1, \forall n \geq N(1).$$

Fie $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N(1)-1}|, M_1\}$. Atunci $\forall n \in \mathbb{N}$ avem $|a_n| \leq M$.

□

Remarcă. Afirmaţia inversă nu are loc, *nu orice şir mărginit este convergent.* De exemplu, şirul $1, -1, 1, -1, \ldots$ este mărginit, dar nu este convergent.

2.1.5 Teorema despre limita unui şir intermediar

Teorema 2.4 (Teorema „cleştelui”). *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şiruri numerice. Dacă* $a_n \le b_n \le c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *şi* $a_n \to l$, $c_n \to l$, *atunci şi* $b_n \to l$.

Demonstraţie.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{a.î.} \quad l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon, \forall n \ge N_1(\varepsilon).$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0, \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{a.î.} \quad l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon, \forall n \ge N_2(\varepsilon).$$

Fie $N = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Atunci $\forall n \ge N$ avem

$$l - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < l + \varepsilon.$$

Deci $|b_n - l| < \varepsilon$, $\forall n \ge N$, ceea ce înseamnă că $b_n \to l$.

□

2.1.6 Trecerea la limită în inegalităţi

Teorema 2.5. *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir convergent cu limita* $a \in \mathbb{R}$ *şi fie* $a < b$. *Atunci există un număr* $n_0 \in \mathbb{N}$ *aşa încât* $a_n < b$, $\forall n \ge n_0$.

Demonstraţie.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon, \forall n \ge N(\varepsilon).$$

Fie $\varepsilon = b - a > 0$. Atunci $\exists n_0 = N(\varepsilon)$ a.î. $\forall n \ge n_0$ avem

$$|a_n - a| < \varepsilon \Longleftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon = a + b - a = b.$$

Deci $a_n < b$, $\forall n \ge n_0$.

□

Exerciţii.

1. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ şi $c < a$. Demonstraţi că $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $a_n > c$, $\forall n \ge n_0$.
2. Arătaţi că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \ne 0$, atunci $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $a_n \ne 0$, $\forall n \ge n_0$.

Teorema 2.6. *Fie date două şiruri convergente* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Dacă* $a_n \le b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *atunci* $a \le b$.

Demonstraţie. Fixăm numărul $\varepsilon > 0$ în mod arbitrar. Din definiţia limitei şirului numeric deducem că

$$\exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \text{a.î.} \;\; a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, \forall n \ge N_1(\varepsilon);$$

$$\exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon, \forall n \geq N_2(\varepsilon).$$

Fie $n_0 = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Atunci inegalităţile de mai sus au loc pentru orice $n \geq n_0$. Deci

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n < b + \varepsilon.$$

De aici

$$a - \varepsilon < b + \varepsilon \iff a - b < 2\varepsilon.$$

Astfel pentru orice număr pozitiv $\forall \varepsilon > 0$ avem $a - b < 2\varepsilon$, ceea ce este posibil atunci şi numai atunci când $a - b \leq 0$, adică $a \leq b$.

□

Remarcă. Această teoremă ne arată, că dacă într-o inegalitate există limitele membrilor stâng şi drept, atunci putem trece la limită în ea. În plus, dacă condiţiile teoremei au loc într-o formă mai strictă: $a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci în rezultatul trecerii la limită poate apărea egalitatea membrilor inecuaţiei, adică $a \leq b$.

Reţnem, deci că *la trecerea la limită într-o inegalitate strictă, trebuie să înlocuim semnul inegalităţii stricte* " $<$ " *cu semnul inegalităţii slabe* " $\leq$ ".

Exemplu. Fie $a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{2}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem $a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, dar $a = b = 0$.

2.2 Noţiune de subşir. Teorema Bolzano - Weierstrass

2.2.1 Noţiune de subşir. Limita subşirului unui şir convergent

Definiţia 2.5. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir numeric, iar $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir strict crescător de numere naturale. Şirul $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se numeşte *subşir* al şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dacă $b_k = a_{n_k}$ pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$.

Şirul $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ în aşa caz se notează simplu cu $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Se poate arăta că $n_k \geq k$ pentru toţi $k \in \mathbb{N}$.

Exemplu. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n = \dfrac{1}{n}$. Punem:

$$b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{3}, b_3 = \frac{1}{5}, b_4 = \frac{1}{7}, \ldots$$

Astfel $b_k = a_{2k-1} = \dfrac{1}{2k-1}, k \in \mathbb{N}^*$.

Deci, dacă este dat un şir şi din mulţimea termenilor lui este construit un şir nou, atunci acest şir se numeşte subşir al şirului dat dacă ordinea elementelor în el este aceeaşi ca şi în şirul iniţial.

De exemplu, dacă considerăm şirul

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots,$$

atunci

$$1, 3, 5, \dots, 2n + 1, \dots$$

este subşirul lui, pe când

$$2, 1, 3, 4, \dots$$

nu este subşirul lui.

Teorema 2.7. *Dacă un şir numeric $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita a, atunci orice subşir al lui are aceeaşi limită.*

Demonstraţie. În orice vecinătate a punctului a se conţin toţi termenii şirului cu excepţia primilor câţiva (un număr finit!) termeni. Dar atunci, în orice vecinătate a punctului a se conţin toţi termenii oricărui subşir al acestui şir cu excepţia doar a unui număr finit de termeni. Deci orice subşir al şirului convergent este convergent şi are aceeaşi limită a.

□

Observaţie. Dacă un şir conţine două subşiruri convergente cu limite diferite, atunci şirul este divergent.

2.2.2 Teorema Bolzano - Weierstrass despre extragerea unui subşir convergent dintr-un şir mărginit de numere reale

Teorema 2.8 (Bolzano - Weierstrass). *Din orice şir mărginit de numere reale se poate extrage un subşir convergent.*

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir mărginit de numere reale. Întrucât şirul este mărginit, există un segment $I_0 = [a, b]$ a.î. $a \leq x_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Împărţim segmentul I_0 în jumătate şi evident că cel puţin una din aceste jumătăţi va conţine o infinitate de termeni ai şirului dat. Notăm jumătatea respectivă cu

$$I_1 = [a_1, b_1], \quad |I_1| = \frac{b-a}{2}.$$

Fie x_{n_1} un termen al şirului dat, $x_{n_1} \in I_1$. Împărţim segmentul I_1 în jumătate şi notăm cu

$$I_2 = [a_2, b_2], \quad |I_2| = \frac{b-a}{2^2}$$

acea jumătate care conţine o infinitate de termeni ai şirului şi fie x_{n_2} un termen arbitrar cu $x_{n_2} \in I_2$ şi $n_2 > n_1$.

Prelungind acest proces nemărginit vom obţine un şir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ care este subşir al şirului dat şi aşa încât

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Segmentele $I_1, I_2, \dots, I_k, \dots$ formează un şir de segmente incluse lungimile cărora tind la zero

$$|I_k| = \frac{b-a}{2^k} \to 0 \;\text{ când }\; k \to \infty.$$

Conform principiului segmentelor incluse

$$\exists ! c \ \text{ a.î. } \ a_k \leq c \leq b_k, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

şi

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = c.$$

Dar atunci în baza teoremei despre limita şirului intermediar avem că

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c.$$

□

2.3 Operaţii cu şiruri convergente

2.3.1 Noţiune de şir infinit mic. Proprietăţile şirurilor infinit mici

Definiţia 2.6. Şirul de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte *infinit mic* dacă

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Astfel $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir infinit mic dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } \ |a_n| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon).$$

De exemplu, şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n = \dfrac{1}{n}$ este un infinit mic.

Teorema 2.9. *Suma algebrică a unui număr finit de şiruri infinit mici este un şir infinit mic.*

Demonstraţie. Fie $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri infinit mici. Trebuie să demonstrăm că $(\alpha_n + \beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este infinit mic.

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } \ |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq N_1(\varepsilon),$$

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } \ |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq N_2(\varepsilon).$$

Fie $N_0 = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Atunci pentru orice $n \geq N_0$ ultimele inegalităţi au loc concomitent. Deci

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n \geq N_0,$$

ceea ce înseamnă că

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0.$$

□

Remarcă. Suma unui număr infinit de şiruri infinit mici poate să nu fie un şir infinit mic.

De exemplu, considerăm $\alpha_n = \dfrac{1}{n} \to 0$. Observăm că

$$S_n = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ termeni}} = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \neq 0,$$

iar

$$S_n' = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n^2 \text{ termeni}} = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n \to \infty.$$

Teorema 2.10. *Produsul unui şir mărginit şi a unui şir infinit mic este un şir infinit mic.*

Demonstraţie. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir mărginit, adică

$$\exists M > 0 \ \text{ a.î. } \ |a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fie $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir infinit mic, atunci

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } \ |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}, \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Dar atunci, pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$ avem

$$|a_n \cdot \alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

ceea ce conform definiţiei înseamnă că şirul $(a_n \cdot \alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este infinit mic.

□

Corolarul 1. *Produsul unui şir convergent şi a unui şir infinit mic este un şir infinit mic.*

Corolarul 2. *Produsul a două şiruri infinit mici este un şir infinit mic.*

2.3.2 Noţiune de şir infinit mare

Definiţia 2.7. Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte *infinit mare,* dacă

$$\forall M > 0, \exists N(M) \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } \ |a_n| > M, \forall n \geq N(M).$$

Se notează

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Din punct de vedere geometric, aceasta înseamnă că dacă vom lua un număr arbitrar $M > 0$ oricât de mare, atunci o infinitate de termeni ai şirului se află în exteriorul segmentului $[-M, M]$, iar în interiorul acestui segment se află doar un număr finit de termeni.

Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir infinit mare şi

$$\forall M > 0, \exists N(M) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } a_n > M, \forall n \geq N(M),$$

atunci notăm

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

iar dacă

$$\forall M > 0, \exists N(M) \in \mathbb{N} \text{ a.î. } a_n < -M, \forall n \geq N(M),$$

atunci notăm

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Exemple.

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = n^2$ este un şir infinit mare: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = (-1)^n \cdot n$ este un şir infinit mare: $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot n = \infty$.

3. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$a_n = \begin{cases} n^2, \text{ pentru } n \text{ par;} \\ \dfrac{1}{n}, \text{ pentru } n \text{ impar} \end{cases}$$

este un şir nemărginit, dar nu este infinit mare, deoarece în exteriorul oricărui segment $[-M, M]$ există o infinitate de termeni ai şirului, dar şi în interiorul acestui segment de asemenea se conţin o infinitate de termeni ai şirului.

Teorema 2.11. *Dacă şirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este infinit mic şi toţi termenii lui sunt nenuli, atunci şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$ este infinit mare.*

Teorema 2.12. *Dacă şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este infinit mare, atunci şirul $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\alpha_n = \dfrac{1}{a_n}$ este infinit mic.*

Exerciţiu. Demonstraţi teoremele 2.11 şi 2.12.

2.3.3 Condiţia necesară şi suficientă ca un număr să fie limita unui şir

Teorema 2.13. *Pentru ca numărul a să fie limita şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este necesar şi suficient ca termenul general al şirului să admită prezentarea în forma*

$$a_n = a + \alpha_n,$$

unde α_n este termenul general al unui şir infinit mic.

Demonstraţie. *Necesitatea.* Fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Conform definiţiei limitei şirului numeric avem următoarele:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } \ |a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Punem $\alpha_n = a_n - a$. Şi deci $|\alpha_n| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon)$, ceea ce înseamnă că $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir infinit mic.

Suficienţa. Fie $a_n = a + \alpha_n$. Atunci $\alpha_n = a_n - a$ şi în baza definiţiei şirului infinit mic avem

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } \ |\alpha_n| < \varepsilon, \forall n \geq N(\varepsilon).$$

Deci $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru toţi $n \geq N(\varepsilon)$ ceea ce înseamnă că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

□

2.3.4 Operaţii cu şiruri convergente

Teorema 2.14. *Suma algebrică a două şiruri convergente este un şir convergent şi în plus, dacă $a_n \to a$, $b_n \to b$, atunci*

$$a_n + b_n \to a + b.$$

Demonstraţie.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow a_n = a + \alpha_n, \quad \text{unde} \quad \alpha_n \to 0, n \to \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \Longleftrightarrow b_n = b + \beta_n, \quad \text{unde} \quad \beta_n \to 0, n \to \infty.$$

Deci

$$a_n + b_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n).$$

Fie $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$. Conform Teoremei 2.9 avem că $\gamma_n \to 0$, când $n \to \infty$. Deci

$$a_n + b_n = (a + b) + \gamma_n, \quad \text{unde} \quad \gamma_n \to 0, n \to \infty,$$

ceea ce conform Teoremei 2.13 înseamnă că $a_n + b_n \to a + b$.

□

Teorema 2.15. *Produsul a două şiruri convergente este un şir convergent şi în plus, dacă $a_n \to a$, $b_n \to b$, atunci*

$$a_n \cdot b_n \to a \cdot b.$$

Demonstraţie.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow a_n = a + \alpha_n, \quad \text{unde} \quad \alpha_n \to 0, n \to \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \Longleftrightarrow b_n = b + \beta_n, \quad \text{unde} \quad \beta_n \to 0, n \to \infty.$$

Deci

$$a_n \cdot b_n = a \cdot b + a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n.$$

Fie $\gamma_n = a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n$. Conform Teoremelor 2.9 şi 2.10 avem că $\gamma_n \to 0$, când $n \to \infty$. Deci

$$a_n \cdot b_n = a \cdot b + \gamma_n, \quad \text{unde} \quad \gamma_n \to 0, n \to \infty,$$

ceea ce conform Teoremei 2.13 înseamnă că $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$.

□

Corolarul 1. Dacă $a_n \to a$, atunci pentru orice constantă C avem

$$\lim_{n\to\infty} C \cdot a_n = C \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = C \cdot a,$$

adică factorul constant poate fi scos în faţa semnului de limită.

Corolarul 2. Dacă $a_n \to a$ şi k este un număr natural fixat, atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^k = a^k.$$

Teorema 2.16. *Dacă $a_n \to a$ şi $b_n \to b$, $b \neq 0$, atunci*

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}.$$

Demonstraţie.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow a_n = a + \alpha_n, \quad \text{unde} \quad \alpha_n \to 0, n \to \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \Longleftrightarrow b_n = b + \beta_n, \quad \text{unde} \quad \beta_n \to 0, n \to \infty.$$

Să calculăm diferenţa

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{ab + b\alpha_n - ab - a\beta_n}{b(b+\beta_n)} = \frac{1}{b(b+\beta_n)}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

Putem considera $b > 0$ şi atunci deoarece $b_n \to b$, există un rang n_0 aşa încât

$$b_n > \frac{b}{2}, \quad \forall n \geq n_0 \qquad \text{sau} \qquad \frac{1}{b_n} < \frac{2}{b}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Prin urmare,

$$0 < \frac{1}{b(b+\beta_n)} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n} < \frac{1}{b} \cdot \frac{2}{b} = \frac{2}{b^2},$$

deci şirul

$$\left(\frac{1}{b(b+\beta_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

este mărginit. Dar atunci şirul cu termenul general

$$\frac{1}{b \cdot b_n}(b\alpha_n - a\beta_n) = \gamma_n$$

este infinit mic şi prin urmare

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \to 0.$$

□

2.3.5 Nedeterminări

În cele de mai sus, nu am cercetat şirurile infinit mari şi nici cazul când la calculul limitei câtului a două şiruri, limita numitorului este egală cu 0.

Teorema 2.17.

$$(a_n \to -\infty \quad \text{şi} \quad b_n \to b, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow a_n + b_n \to -\infty$$

$$(a_n \to +\infty \quad \text{şi} \quad b_n \to b, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$$

$$(a_n \to -\infty \quad \text{şi} \quad b_n \to -\infty) \Rightarrow a_n + b_n \to -\infty$$

$$(a_n \to +\infty \quad \text{şi} \quad b_n \to +\infty) \Rightarrow a_n + b_n \to +\infty.$$

Remarca 1. Se consideră lipsită de sens expresia

$$+\infty - \infty,$$

care se numeşte *nedeterminare.*

Exemple.

1. $a_n = n^2 + n \to +\infty$, $b_n = -n^2 \to -\infty : a_n + b_n \to [+\infty - \infty] = n \to +\infty$.
2. $a_n = n^2 \to +\infty$, $b_n = -n^2 + 3 \to -\infty : a_n + b_n \to [+\infty - \infty] = 3$.
3. $a_n = n^2 \to +\infty$, $b_n = -n^2 + \dfrac{1}{n} \to -\infty : a_n + b_n \to [+\infty - \infty] = \dfrac{1}{n} \to 0$.
4. $a_n = n^2 \to +\infty$, $b_n = -n^2 + (-1)^n \to -\infty : a_n + b_n \to [+\infty - \infty] = (-1)^n$, şirul nu are limită.

Teorema 2.18.

$$(a_n \to -\infty, b_n \to b, b > 0) \Rightarrow a_n \cdot b_n \to -\infty$$

$$(a_n \to -\infty, b_n \to b, b < 0) \Rightarrow a_n \cdot b_n \to +\infty$$

$$(a_n \to +\infty, b_n \to b, b > 0) \Rightarrow a_n \cdot b_n \to +\infty$$

$$(a_n \to +\infty, b_n \to b, b < 0) \Rightarrow a_n \cdot b_n \to -\infty$$

$$(a_n \to +\infty, b_n \to +\infty) \Rightarrow a_n \cdot b_n \to +\infty$$

$$(a_n \to +\infty, b_n \to -\infty) \Rightarrow a_n \cdot b_n \to -\infty$$

$$(a_n \to -\infty, b_n \to -\infty) \Rightarrow a_n \cdot b_n \to +\infty.$$

Remarca 2. Se consideră lipsită de sens expresia

$$0 \cdot \infty,$$

care se numeşte *nedeterminare.*

Exemple.

1. $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, $b_n = n \to +\infty : a_n \cdot b_n \to [0 \cdot \infty] = 1.$

2. $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, $b_n = n^2 \to +\infty : a_n \cdot b_n \to [0 \cdot \infty] = n \to +\infty.$

3. $a_n = \dfrac{1}{n^2} \to 0$, $b_n = n \to +\infty : a_n \cdot b_n \to [0 \cdot \infty] = \dfrac{1}{n} \to 0.$

Teorema 2.19.

$$(a_n \to a, a \in \mathbb{R}, b_n \to \infty) \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0$$

$$(a_n \to a, a > 0, b_n \to 0) \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \begin{cases} +\infty, & \textit{dacă} \quad b_n > 0 \\ -\infty, & \textit{dacă} \quad b_n < 0. \end{cases}$$

Remarca 3. Se consideră lipsite de sens expresiile

$$\frac{0}{0} \text{ şi } \frac{\infty}{\infty}.$$

Exemple.

1. $a_n = n \to +\infty$, $b_n = n^2 \to +\infty : \dfrac{a_n}{b_n} \to \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{1}{n} \to 0.$

2. $a_n = n \to +\infty$, $b_n = 2n \to +\infty : \dfrac{a_n}{b_n} \to \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{1}{2}.$

3. $a_n = n \to +\infty$, $b_n = (-1)^n \cdot n \to \infty : \dfrac{a_n}{b_n} \to \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = (-1)^n$ – nu are limită.

4. $a_n = \dfrac{1}{n^2} \to 0$, $b_n = \dfrac{1}{n^3} \to 0 : \dfrac{a_n}{b_n} \to \left[\dfrac{0}{0}\right] = n \to +\infty.$

5. $a_n = \dfrac{1}{n^2} \to 0$, $b_n = \dfrac{2}{n^2} \to 0 : \dfrac{a_n}{b_n} \to \left[\dfrac{0}{0}\right] = \dfrac{1}{2}.$

Exerciţiu. Fie că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent, iar şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent. Ce puteţi afirma despre comportarea şirurilor $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Argumentaţi răspunsul.

2.4 Şiruri monotone de numere reale. Convergenţa lor

2.4.1 Marginea superioară şi marginea inferioară a unui şir. Şiruri monotone

Definiţia 2.8. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir mărginit de numere reale. *Marginea superioară (inferioară) a şirului* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte marginea superioară (inferioară) a mulţimii valorilor termenilor şirului. Se notează

$$\sup_n a_n \qquad (\text{corespunzător} \quad \inf_n a_n).$$

Deci, numărul β este marginea superioară a şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă şi numai dacă
1. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq \beta$,
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $a_{N(\varepsilon)} > \beta - \varepsilon$.

Numărul α este marginea inferioară a şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă şi numai dacă
1. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq \alpha$,
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $a_{N(\varepsilon)} < \alpha + \varepsilon$.

Definiţia 2.9. Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte:
- *strict crescător,* dacă $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$;
- *crescător,* dacă $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$;
- *strict descrescător,* dacă $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$;
- *descrescător,* dacă $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$.

Şirul care aparţine oricărei din clasele menţionate mai sus se numeşte *şir monoton.*

Exemple.
a) $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ este un şir strict crescător.
b) $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, n, n, \ldots$ este un şir crescător.
c) $1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$ nu este şir monoton.

2.4.2 Teorema despre existenţa limitei unui şir monoton

Teorema 2.20. *Orice şir numeric crescător mărginit superior are limită egală cu marginea superioară a lui.*

Demonstraţie. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir crescător, mărginit superior şi fie $\sup\limits_n a_n = \beta$. Fixăm în mod arbitrar numărul pozitiv ε. Din faptul că β este marginea superioară a şirului rezultă că

$$\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{a.î.} \quad a_{N(\varepsilon)} > \beta - \varepsilon,$$

iar deoarece şirul este crescător, avem

$$a_n \geq a_{N(\varepsilon)}, \forall n > N(\varepsilon).$$

Aşadar, $\forall n > N(\varepsilon)$:

$$\beta - \varepsilon < a_{N(\varepsilon)} \leq a_n \leq \beta < \beta + \varepsilon,$$

adică

$$|a_n - \beta| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon),$$

ceea ce înseamnă că $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$\square$

Teorema 2.21. *Orice şir numeric descrescător mărginit inferior are limită egală cu marginea inferioară a lui.*

Teorema 2.22. *Orice şir numeric monoton şi mărginit de numere reale este convergent.*

2.4.3 Numărul e

Să cercetăm şirul numeric $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu termenul general

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Să demonstraăm că acest şir are limită. Mai întâi vom transforma termenul general aplicând formula binomului lui Newton

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdots k}a^{n-k}b^k + \cdots +$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdots n}b^n.$$

Astfel

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right);$$

$$a_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Observăm că fiecare termen din expresia pentru a_{n+1} este mai mare decât termenul corespunzător din expresia pentru a_n şi în plus, a_{n+1} conţine cu un termen pozitiv mai mult decât a_n. Prin urmare

$$a_n < a_{n+1}.$$

Să ne convingem, că şirul dat este mărginit. Observăm că

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n} =$$

$$= 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3, \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Aşadar, şirul

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n = 1, 2, \ldots$$

este strict ctrescător şi mărginit superior, şi deci convergent. Limita acestui şir se notează cu e graţie matematicianului, mecanicianului, astronomului şi fizicianului elveţian *Leonhard Euler* (Basel, 15.04.1707 - Sankt Petersburg, 18.09.1783).

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828459045\ldots$$

e este un număr transcendent, fapt care pentru prima dată a fost demonstrat în anul 1873 de către matematicianul francez *Charles Hermite* (Dieuze, 24.12.1822 - Paris, 14.01.1901).

2.4.4 Limita superioară şi limita inferioară a unui şir

Din termenii unui şir de numere reale putem alcătui o infinitate de subşiruri. În cazul când subşirul extras este convergent, limita lui se numeşte *limită parţială a şirului dat.* Conform teoremei Bolzano - Weierstrass orice şir are cel puţin o limită parţială finită sau infinită. De aici reiese că orice şir poate avea mai multe limite parţiale şi o importanţă deosebită au cea mai mare şi cea mai mică limită parţială. Deoarece şirurile sunt considerate în $\overline{\mathbb{R}}$, cea mai mare limită parţială poate fi $+\infty$, iar cea mai mică $-\infty$.

Definiţia 2.10. Se numeşte *limită superioară a şirului* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cea mai mare limită parţială a lui şi se notează

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \quad \text{sau} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Definiţia 2.11. Se numeşte *limită inferioară a şirului* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cea mai mică limită parţială a lui şi se notează

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \quad \text{sau} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Din aceste definiţii rezultă

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\},$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k \mid k \geq n\}.$$

Observăm că limita superioară este limita unui şir descrescător şi deci va coincide cu marginea inferioară a mulţimii termenilor şirului $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $b_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}$, adică

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k.$$

La fel, se observă că limita inferioară este limita unui şir crescător şi deci va coincide cu marginea superioară a mulţimii termenilor şirului $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $c_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\}$, adică

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Exemple.

1) $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = -1.$$

2) $a_n = (-1)^n \cdot n, n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = +\infty, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = -\infty.$$

3) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 0, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 0.$$

Teorema 2.23. *Orice şir de numere reale are limită superioară şi limită inferioară în* $\overline{\mathbb{R}}$.

Teorema 2.24. *Un şir* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de numere reale este convergent dacă şi numai dacă este mărginit şi*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

Următoarea teoremă exprimă condiţiile necesare şi suficiente ca un număr dat să fie limita superioară a unui şir dat.

Teorema 2.25. *Pentru ca numărul a să fie limita superioară a şirului* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este necesar şi suficient ca pentru orice număr pozitiv* $\varepsilon > 0$ *să fie satisfăcute următoarele condiţii:*

i) $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *a.î.* $a_n < a + \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$,

ii) $\forall N_0 \in \mathbb{N}, \exists N'(\varepsilon, N_0) \in \mathbb{N}$ *a.î.* $N' > N_0$ *şi* $a_{N'} > a - \varepsilon$.

Prima condiţie din punct de vedere geometric exprimă faptul că pentru orice $\varepsilon > 0$ fixat, o submulţime infinită de termeni ai şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfac condiţia $a_n < a + \varepsilon$ şi numai o mulţime finită de termeni poate satisface condiţia $a_n \geq a + \varepsilon$.

Condiţia a doua înseamnă că pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat există o submulţime infinită de termeni ai şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care satisfac condiţia $a_n > a - \varepsilon$.

2.5 Şiruri Cauchy

2.5.1 Noţiune de şir Cauchy. Mărginirea unui şir Cauchy

Definiţia 2.12. Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte *şir Cauchy* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi $m > N(\varepsilon)$ să avem $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Teorema 2.26. *Orice şir Cauchy de numere reale este mărginit.*

Demonstraţie. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir Cauchy. Atunci $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î.

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \forall m > N(\varepsilon), \forall n > N(\varepsilon).$$

Fie $\varepsilon = 1$ şi notăm $n_0 = N(1) + 1$. Atunci putem lua $m = n_0$ şi deci avem $|a_n - a_{n_0}| < 1$, $\forall n > N(1)$. Deci

$$|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}| = M_0, \forall n > N(1).$$

Fie $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N(1)}|, M_0\}$. Atunci $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ceea ce înseamnă că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit.

□

2.5.2 Criteriul lui Cauchy de convergenţă a şirurilor de numere reale

Teorema 2.27. *Un şir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale este convergent dacă şi numai dacă este un şir Cauchy.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, atunci $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î.

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > N(\varepsilon).$$

Dacă $m > N(\varepsilon)$ atunci $|a_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Astfel pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi orice $m > N(\varepsilon)$ avem

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

adică şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este fundamental.

Suficienţa. Fie că $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy. Conform Teoremei 2.26 el este mărginit, iar conform Teoremei Bolzano -Weierstrass din el putem extrage un subşir convergent $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ şi fie

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

Dar atunci

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{a.î.} \quad |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall k > K(\varepsilon).$$

Din faptul că şirul dat este un şir Cauchy, pentru numărul ε deja fixat vom găsi un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fie $N_0 = \max\{n_{K(\varepsilon)}, N(\varepsilon)\}$, atunci pentru toţi $n > N_0$ şi $n_k > N_0$ avem

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

□

Capitolul 3

Limita şi continuitatea funcţiei de o variabilă reală

3.1 Limita unei funcţii într-un punct

3.1.1 Noţiune de punct de acumulare pentru o mulţime. Exemple

Definiţia 3.1. Fie $I \subset \mathbb{R}$. Un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ se numeşte *punct de limită* sau *punct de acumulare* pentru mulţimea I, dacă în orice vecinătate a acestui punct se conţin puncte din mulţimea I diferite de x_0, adică dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in I, y \neq x_0 \quad \text{a.î.} \quad |y - x_0| < \varepsilon.$$

Mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii I se numeşte *mulţime derivată* şi se notează cu I'.

Exemple.
1) Fie $I = [0, 1]$. Mulţimea derivată este $I' = I$.
2) Pentru mulţimea $I = (0, 1] \cup \{2\}$ mulţimea derivată este segmentul $[0, 1]$.
3) Pentru mulţimea $I = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ mulţimea derivată este $I' = \{0\}$.
4) Mulţimea $I = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100} \right\}$ nu are puncte de limită, $I' = \emptyset$.

Remarcă. Punctul de limită a unei mulţimi poate să aparţină sau să nu aparţină mulţimii.

Definiţia 3.2. Un punct $x \in I$ se numeşte *punct izolat al mulţimii I* dacă el nu este punct de acumulare pentru acestă mulţime, adică dacă există o vecinătate a lui în care nu se conţin alte puncte din I.

Teorema 3.1. *Fie x_0 este un punct de acumulare pentru mulţimea $I \subset \mathbb{R}$. Atunci există un şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de puncte din I diferite de x_0 care converge la x_0, adică:*

1) $\forall n \geq 1, \exists x_n \in I, x_n \neq x_0,$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0.$

Fie $I \subset \mathbb{R}$ şi x_0 este un punct de acumulare pentru I. Vom nota cu $\dot{U}\ (x_0, \varepsilon)$ vecinătatea găurită a punctului x_0 :

$$\dot{U}\ (x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon).$$

Pe viitor vom studia funcţiile $f : I \to \mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$.

3.1.2 Definiţia limitei funcţiei de o variabilă reală într-un punct în sensul lui Cauchy şi în sensul lui Heine

Definiţia 3.3 (Definiţia limitei funcţiei într-un punct în sensul lui Cauchy, definiţia în termenii $\varepsilon - \delta$). Fie x_0 un punct de acumulare pentru mulţimea $I \subset \mathbb{R}$ şi $f : I \to \mathbb{R}$. Numărul $A \in \mathbb{R}$ se numeşte *limita funcţiei f în punctul* x_0, dacă pentru orice număr pozitiv $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru toate punctele $x \in I \cap \dot{U}\ (x_0, \delta)$ are loc inegalitatea

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Se notează

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \ \text{ sau } \ f(x) \to A, x \to x_0.$$

Deci

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{a.î.} \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x \in I, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

sau

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall U(A, \varepsilon), \exists\ \dot{U}\ (x_0, \delta) \quad \text{a.î.} \quad f(I \cap \dot{U}\ (x_0, \delta)) \subset U(A, \varepsilon).$$

Remarcă. Definiţia limitei unei funcţii se dă într-un punct de acumulare al mulţimii de definiţie I, adică într-un punct pentru care avem asigurată posibilitatea de a ne apropia de el prin puncte din mulţimea pe care este definită funcţia f.

Exemplu. Demonstraţi că funcţia $f(x) = 3x - 1$ are limita egală cu 5 în punctul $x_0 = 2$.

Soluţie. Fixăm în mod arbitrar numărul $\varepsilon > 0$. Trebuie să găsim un aşa număr $\delta > 0$ încât, pentru toţi $x \neq 2$ cu $|x - 2| < \delta$ să aibă loc inegalitatea $|(3x - 1) - 5| < \varepsilon$. Să cercetăm relaţia $|(3x - 1) - 5| < \varepsilon$ şi să o rezolvăm în raport cu $|x - 2|$. Avem

$$|(3x - 1) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Astfel dacă pentru numărul arbitrar fixat $\varepsilon > 0$ vom lua $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{3}$, atunci pentru toate punctele $x \neq 2$ cu $|x-2| < \delta$ va avea loc inegalitatea $|(3x-1)-5| < \varepsilon$, ceea ce conform definiţiei limitei funcţiei înseamnă că

$$\lim_{x\to 2}(3x-1) = 5.$$

Definiţia 3.4. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulţimea $I \subset \mathbb{R}$ şi $f : I \to \mathbb{R}$. Vom spune că funcţia $f(x)$ *are limita* $+\infty$ în punctul x_0, dacă

$$\forall M > 0, \exists \delta(M) > 0 \quad \text{a.î.} \quad f(x) > M, \quad \forall x \in I \cap \dot{U}(x_0, \delta).$$

Definiţia 3.5. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulţimea $I \subset \mathbb{R}$ şi $f : I \to \mathbb{R}$. Vom spune că funcţia $f(x)$ *are limita* $-\infty$ în punctul x_0, dacă

$$\forall M > 0, \exists \delta(M) > 0 \quad \text{a.î.} \quad f(x) < -M, \quad \forall x \in I \cap \dot{U}(x_0, \delta).$$

Definiţia 3.6. Fie $x_0 = +\infty$ un punct de acumulare pentru mulţimea I. Numărul A se numeşte *limita funcţiei* $f(x)$ *când* $x \to +\infty$ dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta \in \mathbb{R} \quad \text{a.î.} \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x \in I, x > \Delta.$$

Definiţia 3.7 (Definiţia limitei funcţiei într-un punct în sensul lui Heine, definiţia cu şiruri). Fie x_0 un punct de acumulare pentru mulţimea $I \subset \mathbb{R}$ (posibil $x_0 = -\infty$ sau $x_0 = +\infty$). Fie $f : I \to \mathbb{R}$.

Numărul A (posibil $A = -\infty$ sau $A = +\infty$) se numeşte *limita funcţiei* f *în punctul* x_0 dacă pentru orice şir de puncte $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n \in I \setminus \{x_0\}$, $x_n \neq x_0$ convergent la x_0 ($x_n \to x_0$, $n \to +\infty$) şirul corespunzător de valori ale funcţiei converge la A

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

3.1.3 Echivalenţa definiţiilor limitei unei funcţii într-un punct în sensul lui Cauchy şi în sensul lui Heine

Teorema 3.2. *Definiţiile limitei funcţiei într-un punct în sensul lui Heine şi în sensul lui Cauchy sunt echivalente.*

Demonstraţie. Echivalenţa a două afirmaţii D şi D' înseamnă că dacă este adevărată afirmaţia D, atunci este adevărată şi afirmaţia D' şi invers.

Fie că numărul A este limita funcţiei $f(x)$ în punctul x_0 în sensul definiţiei lui Heine, adică pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n \in I \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$ avem $f(x_n) \to A$. Trebuie să arătăm că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ a.î.

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \forall x \in I : 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Vom admite contrariul, fie că A nu este limita funcţiei $f(x)$ în punctul x_0 în sensul definiţiei lui Cauchy, adică

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{a.î.} \quad \forall \delta > 0, \exists x_\delta \neq x_0, |x_\delta - x_0| < \delta \quad \text{şi} \quad |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon.$$

Vom alege în mod arbitrar un şir $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\delta_n > 0$ convergent la 0, d.e. $\delta_n = \dfrac{1}{n}$. Atunci pentru fiecare δ_n (deci pentru fiecare n) se va găsi un astfel de punct x_n încât $x_n \neq x_0$ şi $|x_n - x_0| < \delta_n$ şi

$$|f(x_n) - A| \geq \varepsilon. \tag{3.1}$$

Deoarece $\delta_n \to 0$, rezultă că $x_n \to x_0$, dar din (3.1) rezultă că şirul $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu converge la A, dar aceasta contrazice faptul că A este limita funcţiei $f(x)$ în punctul x_0 în sensul definiţiei lui Heine. Contradicţia obţinută demonstrează afirmaţia.

Fie acum că A este limita funcţiei $f(x)$ în punctul x_0 în sensul definiţiei lui Cauchy. Atunci

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{a.î.} \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x \in I, x \neq x_0, |x - x_0| < \delta(\varepsilon). \tag{3.2}$$

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir arbitrar convergent la x_0, $x_n \neq x_0$. Dar atunci, pentru numărul $\delta = \delta(\varepsilon)$ vom găsi un rang $N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N}^*$ aşa încât

$$|x_n - x_0| < \delta, \quad \forall n > N(\delta).$$

Dar atunci în baza condiţiei (3.2) vom avea că

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon, \forall n > N(\delta),$$

dar aceasta şi înseamnă că $f(x_n) \to A, n \to \infty$, adică numărul A este limita funcţiei $f(x)$ în punctul x_0 în sensul definiţiei lui Heine.

□

3.2 Proprietăţile funcţiilor care au limită într-un punct

3.2.1 Unicitatea limitei funcţiei într-un punct

Teorema 3.3. *Dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ are limită în punctul $x_0 \in I'$, atunci această limită este unică.*

Demonstraţie. Admitem contrariul şi anume că funcţia $f(x)$ în punctul x_0 are două limite diferite A şi A'. Şi fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ şi $x_n \to x_0, n \to \infty$. Atunci şirul valorilor corespunzătoare ale funcţiei $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ar trebui să aibă două limite diferite A şi A', dar aceasta este imposibil, deoarece dacă un şir numeric are limită, atunci ea este unică.

□

Remarcă. Dacă putem construi două şiruri de puncte $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(x''_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x'_n \in I\setminus\{x_0\}$, $x''_n \in I\setminus\{x_0\}$ convergente la x_0 astfel încât şirurile corespunzătoare de valori ale funcţiei $(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(f(x''_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ au limite diferite sau în general nu au limită, atunci funcţia $f(x)$ nu are limită în punctul x_0.

Exemplu. Să arătăm că funcţia $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ nu are limită în punctul $x_0 = 0$. Fie $x'_n = \dfrac{1}{n\pi}$, $x'_n \to 0$,

$$f(x'_n) = \sin n\pi = 0.$$

Fie $x''_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $x''_n \to 0$,

$$f(x''_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Am determinat astfel două şiruri de puncte convergente la 0 pentru care şirurile valorilor corespunzătoare ale funcţiei converg la limite diferite. Prin urmare,

$$\nexists \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}.$$

3.2.2 Limite laterale

Fie funcţia $f(x)$ este definită pe intervalul $a < x < x_0$.

Definiţia 3.8. Vom spune că numărul A_s este *limita la stânga a funcţiei $f(x)$ în punctul x_0* şi vom nota

$$A_s = f(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

dacă pentru orice şir de puncte $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a < x_n < x_0$, $x_n \to x_0$ şirul corespunzător de valori ale funcţiei $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge la A_s.

Sau echivalent în termenii "$\varepsilon - \delta$"

$$A_s = f(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{a.î.} \quad |f(x) - A_s| < \varepsilon, \forall x \text{ cu } x_0 - \delta < x < x_0.$$

Fie funcţia $f(x)$ este definită pe intervalul $x_0 < x < a$.

Definiţia 3.9. Vom spune că numărul A_d este *limita la dreapta a funcţiei $f(x)$ în punctul x_0* şi vom nota

$$A_d = f(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

dacă pentru orice şir de puncte $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_0 < x_n < a$, $x_n \to x_0$ şirul corespunzător de valori ale funcţiei $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge la A_d.

Sau echivalent în termenii "$\varepsilon - \delta$"

$$A_d = f(x_0+0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{a.î.} \quad |f(x)-A_d| < \varepsilon, \forall x \text{ cu } x_0 < x < x_0+\delta.$$

Exemplu.

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{dacă} \quad x < 0 \\ 0, & \text{dacă} \quad x = 0 \\ 1, & \text{dacă} \quad x > 0. \end{cases}$$

$$f(0-0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = -1, \quad f(0+0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = 1.$$

Teorema 3.4. *Pentru ca funcţia $f(x)$ definită pe un interval I care conţine punctul x_0 să aibă limita A în acest punct este necesar şi suficient ca în acest punct să existe limita la stânga şi limita la dreapta a funcţiei date şi să aibă loc egalitatea*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = A.$$

Demonstraţie. *Necesitatea.* Dacă

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A,$$

atunci din definiţia limitei funcţiei imediat rezultă că $A_s = A_d = A$.

Suficienţa.

$$A = A_d = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_1(\varepsilon) > 0 \quad \text{a.î.} \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x, x_0 < x < x_0 + \delta_1.$$

$$A = A_s = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_2(\varepsilon) > 0 \quad \text{a.î.} \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x, x_0 - \delta_2 < x < x_0.$$

Punem $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$. Atunci pentru toţi $x \in I$, $x \neq x_0$, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ va avea loc inegalitatea $|f(x) - A| < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că $f(x) \to A$, $x \to x_0$.

□

3.2.3 Mărginirea şi păstrarea semnului unei funcţii care are limită într-un punct

Teorema 3.5. *Dacă funcţia $f(x)$ are limita finită A în punctul x_0, atunci într-o vecinătate perforată $\dot{U}(x_0)$ funcţia $f(x)$ este mărginită, adică*

$$\exists M > 0 \quad \textit{a.î.} \quad |f(x)| \leq M, \forall x \in \dot{U}(x_0).$$

Demonstraţie.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{a.î.} \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x \in \dot{U}\ (x_0, \delta).$$

Punem $\varepsilon = 1$, atunci $|f(x) - A| < 1, \forall x \in \dot{U}\ (x_0, \delta)$, iar

$$|f(x)| = |f(x) - A| + |A| < 1 + |A| = M, \forall x \in \dot{U}\ (x_0, \delta).$$

□

Teorema 3.6. *Dacă $f(x) \to A$, $x \to x_0$ şi A este un număr nenul finit, atunci există o vecinătate $\dot{U}\ (x_0)$ aşa încât:*

i) $A > 0 \Rightarrow f(x) > \dfrac{A}{2}, \forall x \in \dot{U}\ (x_0)$,

ii) $A < 0 \Rightarrow f(x) < \dfrac{A}{2}, \forall x \in \dot{U}\ (x_0)$.

Demonstraţie.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{a.î.} \quad |f(x) - A| < \varepsilon, \forall x \in \dot{U}\ (x_0, \delta).$$

Fie $\varepsilon = \dfrac{|A|}{2}$. Atunci

$$|f(x) - A| < \frac{|A|}{2}, \forall x \in \dot{U}\ (x_0, \delta) \Longleftrightarrow A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}, \forall x \in \dot{U}\ (x_0, \delta).$$

Dacă $A > 0$, atunci $f(x) > \dfrac{A}{2}$. Dacă $A < 0$, atunci $f(x) < \dfrac{A}{2}$.

□

Remarcă. Dacă funcţia $f(x)$ are în punctul x_0 limită finită nenulă, atunci există o vecinătate a acestui punct în care toate valorile funcţiei au acelaşi semn ca şi cel al limitei funcţiei, adică funcţia îşi păstrează semnul într-o vecinătate găurită a lui x_0.

3.2.4 Teorema despre trecerea la limită în inegalităţi

Din definiţia limitei funcţiei într-un punct în sensul lui Heine şi din proprietăţile şirurilor convergente imediat se obţin unele proprietăţi utile ale funcţiilor ce au limită într-un punct.

Teorema 3.7. *Dacă*

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = A_1 \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to x_0} f_2(x) = A_2$$

şi într-o vecinătate $\dot{U}\ (x_0)$ avem $f_1(x) \leq f_2(x)$, atunci $A_1 \leq A_2$.

3.2.5 Teorema despre limita unei funcţii intermediare

Teorema 3.8. *Fie funcţiile $f_1(x)$, $f_2(x)$ şi $\varphi(x)$ definite într-o anumită vecinătate $\dot{U}(x_0)$ şi pe ea avem*

$$f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x).$$

Dacă

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = A \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to x_0} f_2(x) = A,$$

atunci

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = A$$

3.2.6 Teoremele despre limita sumei, produsului, câtului a două funcţii care au limită într-un punct

Teorema 3.9. *Fie $f(x)$ şi $g(x)$ două funcţii definite într-o vecinătete $\dot{U}(x_0)$ şi fie*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = B,$$

unde A şi B sunt numere finite. Atunci funcţiile $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ au limită în x_0 şi

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = A \pm B, \tag{3.3}$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B. \tag{3.4}$$

Dacă în plus $B \neq 0$, atunci şi funcţia $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ are limită în x_0 şi în plus

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}. \tag{3.5}$$

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir arbitrar de puncte din $\dot{U}(x_0)$ convergent la x_0. Atunci şirurile corespunzătoare $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converg corespunzător la A şi B. Conform proprietăţilor şirurilor numerice convergente, avem

$$f(x_n) \pm g(x_n) \to A \pm B,$$

$$f(x_n) \cdot g(x_n) \to A \cdot B.$$

Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a fost ales arbitrar obţinem egalităţile (3.3) şi (3.4).

Pentru a obţine (3.5) observăm că deoarece $B \neq 0$, $\exists\, \dot{U}(x_0)$ a. î. $g(x) \neq 0$, $\forall x \in \dot{U}(x_0)$. Dar atunci pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n \in \dot{U}(x_0)$, $x_n \to x_0$ avem $f(x_n) \to A$, $g(x_n) \to B \neq 0$, $g(x_n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi din teorema despre limita câtului a două şiruri convergente obţinem (3.5).

□

Teorema 3.10. *Dacă într-o vecinătate* $\dot{U}(x_0)$ *funcţia* $f(x)$ *satisface condiţia:*

$$\exists M > 0 \quad a.\hat{\imath}. \quad |f(x)| > M,$$

iar pentru funcţia $g(x)$ *avem*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0, \quad g(x) \neq 0, \forall x \in \dot{U}(x_0),$$

atunci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Teorema 3.11. *Dacă într-o vecinătate* $\dot{U}(x_0)$ *funcţia* $f(x)$ *satisface condiţia:*

$$\exists M > 0 \quad a.\hat{\imath}. \quad |f(x)| < M,$$

iar pentru funcţia $g(x)$ *avem*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty,$$

atunci

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

3.3 Funcţii infinit mici. Limita funcţiei compuse

3.3.1 Definiţia funcţiei infinit mici într-un punct. Proprietăţile funţiilor infinit mici

În cele de mai jos vom considera că toate funcţiile sunt definite pe o vecinătate găurită a punctului x_0.

Definiţia 3.10. Funcţia $\alpha(x)$ se numeşte *infinit mică în punctul* x_0 (când $x \to x_0$) dacă

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Exemple.
i) Funcţia $f(x) = (x-3)^2$ este infinit mică când $x \to 3$.
ii) Funcţia $f(x) = \dfrac{1}{x}$ este infinit mică când $x \to \infty$.

Teorema 3.12. *Suma şi produsul unui număr finit de funcţii infinit mici în punctul* x_0 *sunt funcţii infinit mici în* x_0.

Produsul unei funcţii infinit mici în punctul x_0 *şi a unei funcţii mărginite în acest punct este o funcţie infinit mică în* x_0.

3.3.2 Condiţia necesară şi suficientă ca un număr dat să fie limita unei funcţii într-un punct

Teorema 3.13. *Pentru ca numărul A să fie limita funcţiei $f(x)$ în punctul x_0 este necesar şi suficient ca funcţia $f(x)$ în vecinătatea punctului x_0 să poată fi prezentată în forma*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

unde $\alpha(x) \to 0, x \to x_0$.

Demonsttraţie. *Necesitatea.* Fie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, atunci

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - A) = \lim_{x \to x_0} f(x) - A = A - A = 0.$$

Deci

$$f(x) - A = \alpha(x), \quad \alpha(x) \to 0, x \to x_0.$$

Suficienţa. Fie $f(x) = A + \alpha(x)$, unde $\alpha(x) \to 0, x \to x_0$. Atunci

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (A + \alpha(x)) = A + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A.$$

Q.E.D.

3.3.3 Teorema despre limita funcţiei compuse

Fie că funcţia $f(x)$ este definită într-o vecinătate găurită $\dot{U}(x_0)$ a punctului x_0, iar funcţia $F(y)$ este definită pe mulţimea valorilor funcţiei $f(x)$. Atunci pe $\dot{U}(x_0)$ este definită funcţia compusă $F(f(x))$.

Teorema 3.14. *Dacă există*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \quad \text{şi} \quad f(x) \neq b \quad \text{pentru} \quad x \neq x_0,$$

şi există

$$\lim_{y \to b} F(y) = A,$$

atunci funcţia compusă $F(f(x))$ are limită în punctul x_0 şi

$$\lim_{x \to x_0} F(f(x)) = \lim_{y \to b} F(y) = A.$$

Demonstraţie. Întrucât $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$, funcţia $f(x)$ este definită într-o vecinătate găurită a punctului x_0 şi pentru orice număr $\varepsilon > 0$ se va găsi un aşa $\delta > 0$ încât

$$f(\dot{U}(x_0, \delta)) \subset U(b, \varepsilon),$$

şi conform ipotezei, pentru $x \neq x_0$ avem $f(x) \neq b$.

Întrucât $\lim\limits_{y\to b} F(y) = A$, funcţia $F(y)$ este definită pe o vecinătate perforată a lui b şi deci pe $\dot{U}\ (x_0, \delta)$ are sens funcţia compusă $F(f(x))$.

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir arbitrar, astfel încât $x_n \to x_0$, $x_n \in\dot{U}\ (x_0, \delta)$ şi fie $y_n = f(x_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Conform ipotezei $y_n \neq b, n = 1, 2, \dots$. Deoarece $F(y) \to A, y \to b$ concludem că

$$\lim_{n\to\infty} F(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} F(y_n) = A.$$

Deoarece şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a fost ales în mod arbitrar rezultă că

$$\lim_{x\to x_0} F(f(x)) = A.$$

□

3.3.4 Criteriul lui Cauchy de existenţă a limitei unei funcţii într-un punct

Teorema 3.15. *Pentru ca o funcţie $f(x)$ să aibă limită finită în punctul $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ este necesar şi suficient ca pentru orice număr pozitiv $\varepsilon > 0$ să existe un aşa număr $\delta(\varepsilon) > 0$ încât pentru orice puncte $x' \in\dot{U}\ (x_0, \delta)$ şi $x'' \in\dot{U}\ (x_0, \delta)$ să aibă loc inegalitatea*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. *Necesitatea.* Fie că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, A \in \mathbb{R}$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o δ – vecinătate găurită a punctului x_0 aşa încât

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in\dot{U}\ (x_0, \delta).$$

Deci, pentru orice puncte $x', x'' \in\dot{U}\ (x_0, \delta)$ avem

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - A + A - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |A - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Suficienţa. Fie că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un aşa număr $\delta(\varepsilon) > 0$ încât pentru orice puncte $x' \in\dot{U}\ (x_0, \delta)$ şi $x'' \in\dot{U}\ (x_0, \delta)$ are loc inegalitatea

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Considerăm un şir arbitrar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $x_n \neq x_0, n = 1, 2, \dots$ şi $x_n \to x_0$, când $n \to \infty$. Să arătăm că şirul $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent. Conform criteriului lui Cauchy de convergenţă a şirurilor numerice, din convergenţa şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ rezultă că pentru numărul δ, există un rang $N(\delta) \in \mathbb{N}$ aşa încât

$$x_n \in\dot{U}\ (x_0, \delta), \forall n > N(\delta).$$

Dar atunci pentru toţi $n > N(\delta)$ şi $m > N(\delta)$ vom avea că

$$x_n \in \dot{U}\ (x_0, \delta) \ \text{ şi } \ x_m \in \dot{U}\ (x_0, \delta)$$

şi deci

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon,$$

dar aceasta înseamnă că şirul $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir Cauchy şi deci este convergent. Fie

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Considerăm un alt şir $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n^* \neq x_0$ şi $x_n^* \to x_0$. Să ne convingem că

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^*) = A.$$

Cu acest scop construim şirul $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$\tilde{x}_n = \begin{cases} x_n, & \text{dacă } \ n = 2k-1, \quad k = 1, 2, \dots \\ x_n^*, & \text{dacă } \ n = 2k, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Evident că $\tilde{x}_n \to x_0$ şi $\tilde{x}_n \neq x_0, n = 1, 2, \dots$ Dar atunci, după cum am demonstrat mai sus şirul $(f(\tilde{x}_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent şi deoarece limita oricărui şir convergent coincide cu limita oricărui subşir al său deducem că

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^*) = \lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Dar atunci, conform definiţiei limitei funcţiei în sensul lui Heine avem

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

$\square$

Remarcă. Dacă x_0 este un număr finit, atunci condiţiile Cauchy pot fi scrise astfel:

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0 : |f(x')-f(x'')| < \varepsilon, \text{ pt toţi } x', x'' : |x'-x_0| < \delta, |x''-x_0| < \delta.$$

3.4 Calculul limitelor funcţiilor

3.4.1 Calculul limitelor funcţiilor raţionale întregi, funcţiilor fracţionar- raţionale, trigonometrice

Pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$ avem $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$. Dar atunci

$$\lim_{x\to x_0} k \cdot x^m = k \cdot x_0^m.$$

Prin urmare, dacă $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ este un polinom de grad n, atunci

$$\lim_{x\to x_0} P_n(x) = P_n(x_0).$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} P_n(x) = \lim_{x\to\pm\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n.$$

Deci

$$\lim_{x\to\pm\infty} P_n(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n.$$

Exemple.

1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+2) = 9+2 = 11.$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^2+3) = \lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2 = +\infty.$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3+3) = \lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3 = -\infty.$

Fie $Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$ un polinom de grad m. Se cere de calculat

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Dacă $Q(x_0) \neq 0$, atunci

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}.$$

Dacă $Q_m(x_0) = 0$, atunci raţionamentele se complică. Aşa, de exemplu, dacă $P_n(x_0) \neq 0$, atunci

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad \text{şi} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

pot fi diferite şi egale ori cu $+\infty$ ori cu $-\infty$.

Dacă $P_n(x_0) = 0$, atunci funcţia raţională $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ poate fi simplificată prin factorul comun $x - x_0$ al polinoamelor.

Exemple.

i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+1}{x+2} = \dfrac{4+1}{2+2} = \dfrac{5}{4}.$

ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x-1} = \dfrac{2}{0}$, să calculăm limitele laterale

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{2}{-0} = -\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{2}{+0} = +\infty.$$

iii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{2}{-1} = -2.$

iv) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$.

Din definiţiile şi proprietăţile funcţiilor triconometrice rezultă că

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0,\quad \lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$$

$$\lim_{x\to x_0}\mathrm{tg}x=\mathrm{tg}x_0,\quad x_0\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

$$\lim_{x\to x_0}\mathrm{ctg}x=\mathrm{ctg}x_0,\quad x_0\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\mathrm{tg}x=+\infty,\quad \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}}\mathrm{tg}x=-\infty.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\mathrm{ctg}x=-\infty,\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\mathrm{ctg}x=+\infty.$$

3.4.2 Prima limită remarcabilă

Să demonstrăm *prima limită remarcabilă.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Fie $x>0$. Construim cercul unitate şi unghiul de mărime x. Avem

$$S_{\triangle AOB}<S_{\mathrm{sect}.AOB}<S_{\triangle AOC}.$$

$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin(\angle AOB)=\dfrac{1}{2}\sin x,$
$S_{\mathrm{sect}.AOB}=\dfrac{1}{2}R^2\cdot x=\dfrac{1}{2}x,$
$S_{\triangle AOC}=\dfrac{1}{2}OA\cdot AC=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot AO\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}x.$
Deci

$$0<\frac{\sin x}{2}<\frac{x}{2}<\frac{\mathrm{tg}x}{2}.$$

Deoarece $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ avem $\sin x>0$. Şi deci

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

sau

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Întrucât

$$\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1,$$

putem aplica teorema despre limita funcţiei intermediare, conform căreea avem

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Deoarece funcţiile $\cos x$ şi $\dfrac{\sin x}{x}$ sunt funcţii pare deducem că

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$$

şi deci definitiv obţinem

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Aplicând teorema despre limita funcţiei compuse obţinem formula

$$\lim_{\star\to 0}\frac{\sin\star}{\star}=1.$$

Exemple.

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=1\cdot 3=3.$

3.4.3 Existenţa limitei unei funcţii monotone

Fie dată o funcţie $f(x)$ definită pe o mulţime $E\subset\mathbb{R}$. Funcţia $f(x)$ se numeşte *monoton crescătoare* (corespunzător *descrescătoare*) pe mulţimea E, dacă pentru orice puncte $x_1,x_2\in E$ aşa încât $x_1<x_2$ are loc inegalitatea

$$f(x_1)\le f(x_2)\quad(\text{coresp. } f(x_1)\ge f(x_2)).$$

Teorema 3.16. *Dacă funcţia $f(x)$ este monoton crescătoare pe intervalul (a,b), atunci în punctele a şi b există limitele laterale ale funcţiei şi anume*

$$\lim_{x\to b^-}f(x)=\sup_{x\in(a,b)}f(x),\quad \lim_{x\to a^+}f(x)=\inf_{x\in(a,b)}f(x).$$

Dacă funcţia $f(x)$ este monoton descrescătoare pe (a,b), atunci

$$\lim_{x\to b^-}f(x)=\inf_{x\in(a,b)}f(x),\quad \lim_{x\to a^+}f(x)=\sup_{x\in(a,b)}f(x).$$

Demonstraţie. Fie că funcţia $f(x)$ este monoton crescătoare pe intervalul (a,b). Şi fie $A=\sup\limits_{x\in(a,b)}f(x)$. Sunt posibile două cazuri: A este un număr finit ori $A=+\infty$.

Dacă A este un număr finit, atunci

1. $\forall x\in(a,b): f(x)\le A$.

2. $\forall\varepsilon>0,\exists x_\varepsilon\in(a,b): f(x_\varepsilon)>A-\varepsilon$.

Fie $\delta=b-x_\varepsilon$, atunci în baza monotoniei funcţiei $f(x)$ avem că pentru orice x aşa încât $x_\varepsilon<x<b$ avem

$$A-\varepsilon<f(x_\varepsilon)<f(x).$$

Dar

$$x_\varepsilon < x < b \Leftrightarrow b - \delta < x < b$$

şi deci

$$\forall x,\ b - \delta < x < b \ \text{ avem } \ A - \varepsilon < f(x) \leq A < A + \varepsilon,$$

adică

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = A.$$

Dacă $\sup\limits_{x \in (a,b)} f(x) = +\infty$, atunci pentru orice număr $\varepsilon > 0$ fixat există un punct $x_\varepsilon \in (a, b)$ aşa încât

$$f(x_\varepsilon) > \varepsilon.$$

Punem $\delta = b - x_\varepsilon$ şi atunci pentru orice $b - \delta < x < b$ avem

$$f(x) \geq f(x_\varepsilon) > \varepsilon,$$

dar aceasta, conform definiţiei, înseamnă că

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty.$$

Analogic se demonstrează şi celelalte afirmaţii ale teoremei.

□

Corolar. Dacă funcţia $f(x)$ este monotonă pe un interval (a, b), atunci în fiecare punct $x_0 \in (a, b)$ există limitele laterale

$$f(x_0 - 0) \ \text{ şi } \ f(x_0 + 0)$$

şi aceste limite sunt finite.

3.4.4 Fromula fundamentală pentru numărul e

Amintim că mai devreme am demonstrat formula

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Să considerăm funcţia

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

definită pentru orice $x \neq 0$ şi să demonstrăm că

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3.6}$$

Pentru aceasta trebuie să demonstrăm că

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3.7}$$

şi

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3.8}$$

Să demonstrăm (3.7). Cu acest scop considerăm un şir arbitrar de puncte $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$. Deci, putem considera $x_k > 1, \forall k \in \mathbb{N}$. Fie $n_k = [x_k]$, atunci $\forall k \in \mathbb{N}$ avem

$$n_k \leq x_k < n_k + 1. \tag{3.9}$$

Deci

$$\frac{1}{n_k+1} < \frac{1}{x_k} \leq \frac{1}{n_k},$$

$$1+\frac{1}{n_k+1} < \frac{1}{x_k}+1 \leq 1+\frac{1}{n_k}. \tag{3.10}$$

Din (3.9) şi (3.10) avem

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

Evident că, atunci când $k\to\infty$ odată cu $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vor converge la $+\infty$ şi şirurile $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ şi $(n_k+1)_{k\in\mathbb{N}}$.

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\right]\frac{1}{1+\dfrac{1}{n_k+1}} = \frac{e}{1+0} = e.$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\cdot\left(1+\frac{1}{n_k}\right) = e\cdot(1+0) = e.$$

Dar atunci conform teoremei despre limita şirului intermediar rezultă că

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e.$$

Deoarece şirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a fost ales în mod arbitrar concludem că are loc (3.7).

Pentru a demonstra (3.8) vom pune $x = -y$, dar atunci dacă $x\to-\infty$, atunci $y\to+\infty$ şi deci avem

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\right] = e\cdot(1+0) = e.$$

Prin urmare formula (3.6) este demonstrată. Această formulă se numeşte *a doua limită remarcabilă*.

3.4.5 Unele consecinţe din formula fundamentală pentru numărul e

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$.
Într-adevăr,
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log_a e.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$.
Intr-adevăr, notăm $a^x - 1 = t$, atunci $x = \log_a(1+t)$ şi când $x\to 0$, avem $t\to 0$, deci
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\log_a(1+t)}{t}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$.
Intr-adevăr,
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln(1+x)^\alpha}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x} = 1\cdot\alpha\cdot 1 = \alpha.$$

Exemple.
i)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot\frac{4x}{\dfrac{\sin x}{x}\cdot x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot 4}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}} = \frac{1\cdot 4}{1} = 4.$$

ii) Calculaţi limita
$$\lim_{x\to 1}\frac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}.$$
Facem substituţia $x-1=t$, atunci $x=t+1$. Dacă $x\to 1$, atunci $t\to 0$. Astfel obţinem
$$\lim_{t\to 0}\frac{3-\sqrt{10-t-1}}{\sin 3\pi(t+1)} = \lim_{t\to 0}\frac{3-\sqrt{9-t}}{\sin(3\pi t+3\pi)} = \lim_{t\to 0}\frac{(3-\sqrt{9-t})(3+\sqrt{9-t})}{(3+\sqrt{9-t})\cdot(-\sin 3\pi t)} =$$
$$= -\lim_{t\to 0}\frac{t}{(3+\sqrt{9-t})\dfrac{\sin 3\pi t}{3\pi t}\cdot 3\pi t} = -\frac{1}{6\cdot 3\pi} = -\frac{1}{18\pi}.$$

3.5 Studiul comportării locale a funcţiei

3.5.1 Relaţia „O”. Proprietăţile relaţiei „O”

Vom considera că toate funcţiile studiate mai jos sunt definite într-o vecinătate găurită $\dot{U}(x_0)$ a punctului $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Definiţia 3.11. Dacă pentru funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ există o vecinătate $\dot{V}(x_0)$ şi o constantă pozitivă $C > 0$ încât pentru toţi $x \in \dot{V}(x_0)$ are loc inegalitatea

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|,$$

atunci se spune că *funcţia f este supusă funcţiei g* sau *f este mărginită în raport cu g în* $\dot{V}(x_0)$.

Se notează

$$f(x) = O(g(x)), x \to x_0 \quad \text{sau} \quad f = O(g), x \to x_0.$$

Se citeşte: funcţia $f(x)$ este O mare de $g(x)$ când x tinde la x_0.

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Relaţia $f(x) = O(1), x \to x_0$ este echivalentă cu faptul că $f(x)$ este mărginită într-o anumită vecinătate $\dot{V}(x_0)$.

Afirmaţie. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ şi pentru toţi $x \in \dot{U}(x_0)$ avem $g(x) \neq 0$. Atunci $f = O(g), x \to x_0$ atunci şi numai atunci când $\dfrac{f}{g}$ este funcţie mărginită într-o anumită vecinătate $\dot{V}(x_0)$.

Exemplu. Fie $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}, x_0 = 0$. Deoarece atunci când $x \to 0$ putem considera că $|x| < 1$ avem

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x^2}\right| = |g(x)|,$$

adică

$$\frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right), x \to 0.$$

Proprietăţile relaţiei „O”.

1) Dacă există

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

atunci

$$f(x) = O(g(x)), x \to x_0.$$

2) Dacă $f = O(g), x \to x_0$ şi $g = O(h), x \to x_0$, atunci

$$f = O(h), x \to x_0,$$

adică

$$O(O(h)) = O(h), x \to x_0.$$

3) Dacă $f = O(g), x \to x_0$ şi $h = O(g), x \to x_0$, atunci

$$f + h = O(g), x \to x_0.$$

Astfel

$$O_1(g) + O_2(g) = O(g), x \to x_0.$$

4) Dacă $f_1 = O(g_1), x \to x_0$ şi $f_2 = O(g_2), x \to x_0$, atunci

$$f_1 \cdot f_2 = O(g_1 \cdot g_2), x \to x_0.$$

Astfel

$$O(g_1) \cdot O(g_2) = O(g_1 \cdot g_2), x \to x_0.$$

3.5.2 Relaţia „o". Proprietăţile relaţiei „o"

Definiţia 3.12. Funcţia $f(x)$ se numeşte *infinit mică în raport cu funcţia* $g(x)$ în punctul x_0 dacă într-o anumită vecinătate $\dot{V}(x_0)$ avem

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x), \quad \text{unde} \quad \alpha(x) \to 0, x \to x_0.$$

Se notează

$$f(x) = o(g(x)), x \to x_0 \quad \text{sau} \quad f = o(g), x \to x_0.$$

Se citeşte: funcţia $f(x)$ este *o mic* de $g(x)$ când x tinde la x_0.

Notaţia $f(x) = o(1), x \to x_0$ înseamnă că $f(x)$ este o funcţie infinit mică în punctul x_0.

Afirmaţie. Fie că pentru toţi x din $\dot{V}(x_0)$ avem $g(x) \neq 0$. Atunci

$$f(x) = o(g(x)), x \to x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Exemplul 1. Fie $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x^2$, $x_0 = 0$. Avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3}{\sin x^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2}{\sin x^2} \cdot x = 1 \cdot 0 = 0.$$

Deci

$$x^3 = o(\sin x^2), x \to 0.$$

Exemplul 2. Fie

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{x}, x_0 = \infty.$$

Observăm, că
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$$
Deci $f(x)=o(g(x)), x\to\infty$, sau $\frac{1}{x^2}=o\left(\frac{1}{x}\right)$, adică $\frac{1}{x^2}$ tinde mai repede la zero, atunci când $x\to\infty$.

În general, dacă funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ sunt infinit mici în punctul x_0 şi $f(x)=o(g(x))$, $x\to x_0$ atunci spunem că $f(x)$ este un infinit mic de ordin superior în raport cu $g(x)$ când $x\to x_0$.

Proprietăţile relaţiei „o"

1. Dacă $f(x)=o(g(x)), x\to x_0$, atunci $f(x)=O(g(x)), x\to x_0$.
2. Dacă $f(x)=o(g(x)), x\to x_0$, şi $g(x)=O(h), x\to x_0$, atunci
$$f(x)=o(h(x)), x\to x_0.$$
Astfel
$$o(O(h))=o(h), x\to x_0.$$
Analogic
$$O(o(h))=o(h), x\to x_0.$$
3. Dacă $f_1(x)=o(g(x)), x\to x_0$ şi $f_2(x)=o(g(x)), x\to x_0$, atunci
$$f_1(x)+f_2(x)=o(g(x)), x\to x_0.$$
4. Dacă $f_1(x)=o(g_1(x)), x\to x_0$ şi $f_2(x)=O(g_2(x)), x\to x_0$, atunci
$$f_1\cdot f_2=o(g_1\cdot g_2), x\to x_0.$$
Astfel
$$o(g_1)\cdot O(g_2)=o(g_1\cdot g_2), x\to x_0.$$

Simbolurile O şi o au fost introduse de către Edmund Landau (14.02.1877-19.02.1938).

3.5.3 Funcţii echivalente

Definiţia 3.13. Funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ se numesc *echivalente când* $x\to x_0$ dacă într-o vecinătate $\dot{U}(x_0)$ este definită o funcţie $\varphi(x)$ aşa încât
$$f(x)=\varphi(x)\cdot g(x) \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=1.$$

Se notează
$$f(x)\sim g(x), x\to x_0.$$

Remarcă. Relaţia de echivalenţă a două funcţii este simetrică, adică dacă $f(x)\sim g(x)$, $x\to x_0$, atunci $g(x)\sim f(x), x\to x_0$.

Exemplu. Fie

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}, \quad g(x) = x^2, \quad x_0 = 0.$$

Avem

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4} \cdot x^2 = \frac{1}{1+x^4} \cdot g(x),$$

adică

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^4}, \quad \lim_{x \to 0} \varphi(x) = 1,$$

deci

$$f(x) \sim g(x), x \to 0.$$

Afirmaţii.

1. Pentru ca funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ să fie echivalente în punctul x_0 este necesar şi suficient ca

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), x \to x_0.$$

2. Fie că $\forall x \in \dot{V}\ (x_0)$ avem $g(x) \neq 0$. Atunci

$$f(x) \sim g(x), x \to x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

3. Pentru orice funcţie $f : \dot{V}\ (x_0) \to \mathbb{R}$ avem $f(x) \sim f(x), x \to x_0$.

4. Dacă $f(x) \sim g(x), x \to x_0$ şi $g(x) \sim h(x), x \to x_0$, atunci

$$f(x) \sim h(x), x \to x_0.$$

5. Dacă $f_1(x) \sim g_1(x), x \to x_0$ şi $f_2(x) \sim g_2(x), x \to x_0$, atunci

$$f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2, x \to x_0.$$

6. Fie că $\forall x \in \dot{V}\ (x_0)$ avem $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ şi $f(x) \sim g(x), x \to x_0$. Atunci pentru orice funcţie $h : V(x_0) \to \mathbb{R}$ din existenţa unei din limitele

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot h(x)), \qquad \lim_{x \to x_0} (g(x) \cdot h(x))$$

rezultă existenţa celeilalte limite şi egalitatea lor.

Analogic, din existenţa unei din limitele

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{f(x)}, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{g(x)}$$

rezultă existenţa celeilalte şi egalitatea lor.

3.5.4 Aplicarea relaţiei de echivalenţă a funcţiilor la calculul limitelor de funcţii

Teorema 3.17. *Dacă* $f(x) \sim f_1(x), x \to x_0,\ g(x) \sim g_1(x), x \to x_0$ *şi există limita*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

atunci există şi limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *şi are loc egalitatea*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Exemplul 1. Întrucât

$$(1+x)^n = 1+C_n^1 x+C_n^2 x^2+\cdots+x^n = 1+nx+(C_n^2 x+\cdots+x^{n-1})\cdot x = 1+nx+\alpha(x)\cdot x = 1+nx+o(x),$$

avem că

$$(1+x)^n - 1 \sim nx, \quad \text{când} \quad x \to 0.$$

Dar atunci

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^m - 1}{(1+t)^n - 1} = \lim_{t \to 0} \frac{mt}{nt} = \frac{m}{n}.$$

Exemplul 2. Din egalităţile

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

deducem că

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x + o(x) - (3x + o(x))}{x + o(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x} = 2.$$

Exemplul 3. Întrucât când $x \to 0$ avem $1 - \cos x = o(x)$, $1 - \cos px = o(x)$, $\sin x = x + o(x)$, $\sin px = px + o(x)$, atunci

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px} = \lim_{x \to 0} \frac{x + o(x)}{px + o(x)} = \frac{1}{p}.$$

Exerciţiu. Calculaţi limita $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x + 3\operatorname{arctg} 7x + 5x^2}{\ln(1 + 5x + \sin^2 x) + xe^x}$.

3.6 Funcţii continue într-un punct

3.6.1 Noţiune de funcţie continuă într-un punct. Operaţii aritmetice cu funcţii continue. Continuitatea funcţiei compuse

Definiţia 3.14. O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte *continuă în punctul* $x_0 \in I$ dacă ea are limită în acest punct egală cu valoarea funcţiei în punctul dat

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

adică

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right).$$

Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte *continuă pe* I dacă ea este continuă în orice punct $x_0 \in I$.

În baza definiţiilor limitei funcţiei în punct în sensul lui Heine şi în sensul lui Cauchy obţinem următoarele definiţii echivalente cu cea dată mai sus.

Definiţia 3.15 (Heine). Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte *continuă în punctul* $x_0 \in I$ dacă pentru orice şir de valori a argumentului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n \in I$ convergent la x_0, şirul valorilor respective ale funcţiei $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge la $f(x_0)$,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Definiţia 3.16 (Cauchy). Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte *continuă în punctul* $x_0 \in I$ dacă pentru orice număr pozitiv $\varepsilon > 0$ se va găsi un număr pozitiv $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $x \in I$ cu $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ are loc inegalitatea

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Definiţia 3.17. Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte *continuă în punctul* x_0 dacă

$$\forall U(f(x_0), \varepsilon), \exists U(x_0, \delta) \quad \text{a.î.} \quad f(I \cap U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \varepsilon).$$

Definiţia 3.18. Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte *continuă la stânga în punctul* x_0 dacă

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0),$$

adică dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{a.î.} \quad \forall x_0 - \delta < x \le x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0| < \varepsilon.$$

Definiţia 3.19. Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte *continuă la dreapta în punctul* x_0 dacă

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

adică dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{a.î.} \quad \forall x_0 \le x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0| < \varepsilon.$$

Fie $f : I \to \mathbb{R}$. Îi dăm argumentului x_0 o creştere Δx aşa încât punctul $x = x_0 + \Delta x$ de asemenea să aparţină lui I. Funcţia $f(x)$ în rezultat va primi creşterea $f(x) - f(x_0)$ notată cu $\Delta f(x_0)$,

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Din definiţia funcţiei continue imediat obţinem

Propoziţia 3.1. *Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul $x_0 \in I$ dacă şi numai dacă oricărei creşteri infinit mici a argumentului îi corespunde o creştere infinit mică a funcţiei,*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0.$$

Uşor ne putem convinge că operaţiile aritmetice cu funcţii continue ne aduc din nou la funcţii continue.

Dacă funcţiile f şi g sunt continue pe I, atunci:

i) suma $f + g$ este continuă pe I;

ii) produsul $f \cdot g$ este funcţie continuă pe I;

iii) câtul $\dfrac{f}{g}$ este funcţie continuă pe mulţimea $D = \{x \in I \mid g(x) \neq 0\}$ pe care este definit câtul.

Teorema 3.18 (Teorema despre continuitatea funcţiei compuse). *Dacă $u = f(x)$ este funcţie continuă în punctul x_0, $f(x_0) = u_0$, iar funcţia $y = g(u)$ este continuă în u_0, atunci funcţia compusă $y = g(f(x))$ este continuă în punctul x_0.*

Cu alte cuvinte, orice *compunere* $g \circ f$ de funcţii continue este şi ea continuă.

3.6.2 Continuitatea unor funcţii elementare

Să considerăm funcţia constantă $f(x) = C$. Pentru orice punct $x \in \mathbb{R}$ şi orice creştere a argumentului Δx avem

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0,$$

deci funcţia dată este continuă în toate punctele $x \in \mathbb{R}$.

Funcţia $f(x) = x$ este continuă în fiecare punct $x_0 \in \mathbb{R}$, deoarece

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0 = f(x_0).$$

Orice polinom algebric

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

este o funcţie continuă în toate punctele $x \in \mathbb{R}$, aceasta rezultă din faptul că funcţia x^n, $n \in \mathbb{N}$ este continuă pe $\mathbb{R}$ şi din teoremele despre operaţiile algebrice cu funcţii continue.

Orice funcţie raţională

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

este continuă în toate punctele $x \in \mathbb{R}$ pentru care $Q(x) \neq 0$.

3.6.3 Puncte de discontinuitate. Clasificarea lor

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă în punctul $x_0 \in I$. Atunci

1) $\exists f(x_0)$;
2) $\exists f(x_0 - 0)$;
3) $\exists f(x_0 + 0)$;
4) $f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Dacă în punctul x_0 cel puţin una din aceste patru condiţii nu se îndeplineşte, punctul x_0 se numeşte *punct de discontinuitate pentru funcţia f.*

Definiţia 3.20. Dacă x_0 este un punct de discontinuitate pentru f în care ambele limite laterale

$$f(x_0 - 0) \quad \text{şi} \quad f(x_0 + 0)$$

există şi sunt finite, atunci x_0 se numeşte *punct de discontinuitate de speţa I pentru funcţia f.*

Mărimea

$$|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$$

se numeşte *saltul funcţiei f în punctul x_0.*

Dacă x_0 este un punct de dicontinuitate de speţa I a lui f în care saltul este egal cu 0, atunci x_0 se numeşte punct de *discontinuitate aparentă.*

Exemplu. Să studiem la continuitate funcţia $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Domeniul de definiţie al funcţiei date este $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funcţia f este discontinuă în punctul $x_0 = 0$, dar

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Aşadar, $x_0 = 0$ este un punct de discontinuitate aparentă. Pentru a înlătura discontinuitatea funcţiei în acest punct, o putem prelungi prin continuitate punând $f(0) = 1$.

Definiţia 3.21. Dacă x_0 este un punct de discontinuitate pentru funcţia $f(x)$ şi cel puţin una dintre limitele laterale ale lui $f(x)$ în acest punct nu există sau este infinită, atunci x_0 se numeşte *punct de discontinuitate de speţa a II-a pentru funcţia f.*

Exemplu. Să studiem la continuitate funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă} \quad x \leq 1 \\ x^2, & \text{dacă} \quad 1 < x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x - 2}, & \text{dacă} \quad 2 < x \leq 3 \\ 1, & \text{dacă} \quad x > 3. \end{cases}$$

Funcţia $f(x)$ este definită pe $\mathbb{R}$, dar ar putea fi discontinuă în punctele $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Fie $x_1 = 1$. Avem

$$f(1) = 1, \qquad f(1-0) = 1+1 = 2, \qquad f(1+0) = 1^2 = 1.$$

Funcţia f are în acest punct discontinuitate de speţa I, saltul funcţiei este egal cu

$$|f(1+0) - f(1-0)| = 1,$$

funcţia este continuă la stânga în acest punct.

Fie $x_2 = 2$. Avem

$$f(2) = 2^2 = 4, \qquad f(2-0) = 2^2 = 4, \qquad f(2+0) = \frac{1}{+0} = \infty.$$

Deci, $x_2 = 2$ este un punct de discontinuitate de speţa a doua pentru f.

Fie $x_3 = 3$. Avem

$$f(3) = \frac{1}{3-2} = 1, \qquad f(3-0) = \frac{1}{3-2} = 1, \qquad f(3+0) = 1.$$

Deci f este continuă în punctul $x_3 = 3$.

3.7 Proprietăţile funcţiilor continue pe un segment

3.7.1 Mărginirea funcţiei continue pe un segment

Definiţia 3.22. O funcţie $f(x)$ se numeşte *continuă pe un segment* $[a,b]$ dacă ea este continuă în fiecare punct al intervalului (a,b), este continuă la dreapta în punctul a şi este continuă la stânga în punctul b.

Clasa funcţiilor continue pe segmentul $[a,b]$ se notează cu $C_{[a,b]}$.

Teorema 3.19 (Weierstrass). *Orice funcţie continuă pe un segment este mărginită.*

$$f \in C_{[a,b]} \quad \Longrightarrow \quad \exists M > 0 \;\; a.î. \;\; |f(x)| \le M, \forall x \in [a,b].$$

Demonstraţie. Admitem contrariul. Fie că

$$\forall M > 0, \exists x_M \in [a,b] \;\; \text{a.î.} \;\; |f(x_M)| > M.$$

Dar atunci, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ putem găsi un punct $x_n \in [a,b]$ astfel încât

$$|f(x_n)| > n. \tag{3.11}$$

Şirul de puncte $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in [a,b]$ este mărginit şi deci, conform Teoremei Bolzano - Weierstrass, din el putem extrage un subşir convergent $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ şi fie

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha.$$

Deoarece

$$a \leq x_{n_k} \leq b, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

trecând la limită cu $k \to \infty$ vom avea

$$a \leq \alpha \leq b$$

şi deci $\alpha \in [a, b]$.

Fiind continuă pe segmentul $[a, b]$, funcţia $f(x)$, este continuă în punctul $\alpha \in [a, b]$ şi deci

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = f(\alpha),$$

dar aceasta contrazice condiţia (3.11). Deci presupunerea făcută este falsă şi prin urmare $f(x)$ este mărginită pe $[a, b]$.

□

Remarcă. Teorema nu este adevărată, dacă funcţia este continuă pe un interval deschis sau semiinterval. De exemplu, funcţia $f(x) = \dfrac{1}{x}$ este continuă pe semiintervalul deschis la stânga $(0, 1]$, dar nu este mărginită pe el.

3.7.2 Atingerea marginii superioare exacte şi marginii inferioare exacte

Teorema 3.20 (Weierstrass). *Dacă o funcţie $f(x)$ este continuă pe un segment $[a, b]$, atunci ea atinge pe acest segment valoarea sa minimă şi valoarea sa maximă, adică se vor găsi aşa puncte $\alpha, \beta \in [a, b]$ încât*

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = f(\alpha), \qquad \max_{x\in[a,b]} f(x) = f(\beta).$$

Demonstraţie. Conform Teoremei 3.20 funcţia $f(x)$ este mărginită pe segmentul $[a, b]$ şi deci există marginea superioară finită a funcţiei f pe $[a, b]$ şi fie

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Dar atunci,

i) $\forall x \in [a, b]$ avem $f(x) \leq M$;

ii) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_\varepsilon \in [a, b]$ a. î. $f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$.

Fie $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Atunci pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ vom găsi un aşa punct $x_n \in [a, b]$ încât

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M.$$

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit şi deci din el putem extrage un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent şi fie

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \beta \quad \text{şi} \quad \beta \in [a, b].$$

Folosind continuitatea funcţiei $f(x)$ în punctul β să trecem la limită în inegalitatea

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \le M.$$

Obţinem

$$M - 0 \le f(\beta) \le M$$

Deci

$$f(\beta) = M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Analogic se demonstrează cealaltă afirmaţie a teoremei.

□

Remarcă. Teorema nu este adevărată, dacă funcţia este continuă pe un interval deschis sau semiinterval. De exemplu, funcţia $f(x) = x$ este continuă pe intervalul $(0,1)$ şi este mărginită pe el, dar

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = \sup_{x\in[a,b]} x = 1 \notin E_f.$$

Exerciţii.

i) Aduceţi un exemplu de funcţie continuă definită pe intervalul $(0,1)$, dar care nu atinge maximul său pe $(0,1)$.

ii) Aduceţi un exemplu de funcţie continuă definită pe $(0,1)$ care este mărginită, dar care nu atinge nici maximul său şi nici minimul său pe acest interval.

iii) Aduceţi un exemplu de funcţie discontinuă definită pe segmentul $[0,1]$ care este mărginită, dar nu atinge nici maximul său şi nici minimul său pe acest segment.

3.7.3 Anularea funcţiei

Teorema 3.21 (Cauchy). *Dacă o funcţie $f(x)$ este continuă pe segmentul $[a,b]$ şi primeşte la extremităţile acestui segment valori de semne opuse, atunci pe intervalul (a,b) există un punct c în care funcţia se anulează, adică*

$$(f(a)<0 \ \text{ şi } \ f(b)>0) \ \text{ sau } \ (f(a)>0 \ \text{ şi } \ f(b)<0) \quad \Longrightarrow \quad \exists c\in(a,b) \ \text{ a.î. } \ f(c)=0.$$

Demonstraţie. Fie $f(a)<0$, iar $f(b)>0$. Împărţim segmentul $[a,b]$ în jumătate. Dacă în mijlocul segmentului $[a,b]$ funcţia primeşte valoarea 0, atunci teorema este demonstrată. În caz contrar, una dintre jumătăţi este de aşa natură încât la extremităţile ei funcţia primeşte valori de semne opuse şi dacă notăm cu $[a_1,b_1]$ acest segment, atunci avem

$$f(a_1)<0, \quad f(b_1)>0.$$

Împărţim segmentul $[a_1,b_1]$ în jumătate şi ori găsim punctul c, ori obţinem un segment $[a_2,b_2]$ la extremităţile căruia funcţia ia valori de semne opuse şi anume

$$f(a_2)<0, \quad f(b_2)>0.$$

Continuând acest proces, ori peste un număr finit de paşi vom avea că punctul de diviziune este punctul căutat, ori vom obţine un şir infinit de segmente incluse $[a_n,b_n]$ aşa încât pentru toţi $n\in\mathbb{N}$ avem

$$f(a_n)<0, \quad f(b_n)>0. \tag{3.12}$$

Lungimile segmentelor $[a_n,b_n]$ sunt egale cu

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0, n\to\infty.$$

În baza principiului segmentelor incluse avem că există un singur punct c comun tuturor segmentelor

$$a_n\le c\le b_n, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Să trecem în (3.12) la limită cu $n\to\infty$ şi să folosim continuitatea funcţiei $f(x)$ pe segmentul $[a,b]$. Obţinem

$$f(c)=\lim_{n\to\infty} f(a_n)\le 0,$$

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0,$$

deci $f(c) = 0$.

□

Exemplu. Funcţia $f(x) = \cos x - x$ este continuă pe segmentul $[0, \pi]$ şi la extremităţile lui ia valorile

$$f(0) = 1 > 0, \qquad f(\pi) = -1 - \pi < 0.$$

Deci pe intervalul $(0, \pi)$ există un aşa punct c încât $f(c) = 0$. Ca urmare, concludem că ecuaţia

$$\cos x - x = 0$$

are o rădăcină pe intervalul $(0, \pi)$.

Exerciţii.

i) Aduceţi un exemplu de funcţie continuă definită pe $[0, 1) \cup (1, 2]$ care este pozitivă în punctul 2, negativă în punctul 0, dar care nu se anulează nici pentru o valoare x.

ii) Credeţi în existenţa numărului $\sqrt[7]{8}$? Adică, există oare un număr care multiplicat prin sine însăşi de 7 ori ar da 8? Înainte de a face o concluzie, gândiţivă că calculatorul vostru vă înşală, caci el în general nu ştie despre $\sqrt[7]{8}$, tot ce poate face el, este să aproximeze acest număr şi ceea ce vă dă el este doar o aproximaţie. De ce totuşi există acest număr?

3.7.4 Atingerea valorilor intermediare

Teorema 3.22 (Proprietatea lui Darboux). *Dacă o funcţie $f(x)$ este continuă pe un segment $[a, b]$ şi la extremităţile lui primeşte valori diferite*

$$f(a) = A, \quad f(b) = B, \quad A \neq B,$$

atunci oricare ar fi numărul C cuprins între A şi B se va găsi un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = C$.

Demonstraţie. Această afirmaţie este o consecinţă directă din Teorema 3.21. Fie $A < C < B$. Considerăm o funcţie ajutătoare

$$F(x) = f(x) - C, \quad x \in [a, b].$$

Ca diferenţa funcţiilor continue pe $[a, b]$, funcţia F este continuă pe $[a, b]$ şi

$$F(a) = f(a) - C = A - C < 0,$$

$$F(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Deci, conform Teoremei 3.21 există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $F(c) = 0$. Dar $F(c) = f(c) - C$, deci $f(c) - C = 0$ şi definitiv avem $f(c) = C$.

□

3.7.5 Continuitatea uniformă a unei funcţii continue pe un segment

Fie dată o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ şi fixăm un punct $x_0 \in I$. Amintim că funcţia $f(x)$ se numeşte continuă în punctul x_0, dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, adică

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ a.î. } \forall x : |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

O funcţie f se numeşte continuă pe mulţimea I, dacă ea este continuă în fiecare punct al acestei mulţimi. În acest caz, punctul x_0 parcurge toată mulţimea I şi pentru numărul $\varepsilon > 0$, numărul δ poate depinde şi de x_0 nu numai de ε.

Definiţia 3.23. O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte *continuă pe mulţimea* I, dacă $\forall \varepsilon > 0$ şi $\forall x_0 \in I$, $\exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, a. î. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, $\forall x \in I : |x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$.

Natural apare întrebarea, s-ar putea oare pentru orice număr pozitiv ε de ales un aşa δ care s-ar potrivi pentru toate punctele mulţimii I?

Definiţia 3.24. O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte *uniform continuă* pe mulţimea I, dacă pentru orice număr pozitiv ε, există un aşa număr $\delta(\varepsilon) > 0$, încât pentru orice puncte $x' \in I$ şi $x'' \in I$ pentru care $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ are loc inegalitatea

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Exemplul 1. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ este uniform continuă pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr, pentru orice $\varepsilon > 0$ avem

$$|f(x') - f(x'')| = |x' - x''| < \varepsilon,$$

adică $\delta = \varepsilon$ şi nu depinde de punctele $x \in \mathbb{R}$.

Exemplul 2. Funcţia $f : (0, \frac{2}{\pi}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ deşi este continuă, nu este uniform continuă pe intervalul dat. Într-adevăr, fie

$$x' = \frac{2}{(2n+1)\pi}, \quad \sin \frac{1}{x'} = \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = \pm 1,$$

$$x'' = \frac{1}{n\pi}, \quad \sin \frac{1}{x''} = \sin(n\pi) = 0.$$

Deci, diferenţa $|f(x') - f(x'')| = 1$ şi nu poate fi făcută oricât de mică, deşi

$$|x' - x''| = \left| \frac{2}{(2n+1)\pi} - \frac{1}{n\pi} \right| \to 0, n \to \infty.$$

Teorema 3.23 (Teorema lui Cantor). *Orice funcţie continuă pe un segment închis este uniform continuă pe el.*

3.8 Continuitatea unor clase de funcţii

3.8.1 Continuitatea funcţiilor monotone

Definiţia 3.25. O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte *strict crescătoare* (coresp. *strict descrescătoare*) pe mulţimea I dacă pentru orice valori $x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2$ are loc inegalitatea

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad (\text{coresp.} \quad f(x_1) > f(x_2)).$$

Definiţia 3.26. O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte *crescătoare* (coresp. *descrescătoare*) pe mulţimea I dacă pentru orice valori $x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2$ are loc inegalitatea

$$f(x_1) \le f(x_2) \qquad (\text{coresp.} \quad f(x_1) \ge f(x_2)).$$

Teorema 3.24. *Fie f o funcţie strict crescătoare (descrescătoare) pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$. Dacă mulţimea $E_f = f(I)$ a valorilor funcţiei f pe intervalul I se conţine într-un interval Y şi îl acoperă în întregime, atunci funcţia f este continuă pe I.*

Demonstraţie. Fie $x_0 \in I$ un punct arbitrar al intervalului I, dar diferit de extremitatea din dreapta a lui. Să demonstrăm continuitatea la dreapta a funcţiei f în punctul x_0.

Să ne convingem mai întâi că punctul $y_0 = f(x_0) \in Y$ nu este extremitatea din dreapta a intervalului Y. Într-adevăr,în intervalul I se va găsi un aşa punct x încât $x > x_0$. Dar atunci $y = f(x) > f(x_0) = y_0$.

Să fixăm în mod arbitrar numărul pozitiv ε, dar aşa încât punctul $y_1 = y_0 + \varepsilon$ de asemenea să aparţină intervalului Y. Conform ipotezei, în I se va găsi un punct x_1 aşa încât $f(x_1) = y_1$. Deoarece $y_1 > y_0$, avem $x_1 > x_0$.

Fie $\delta = x_1 - x_0$. Dacă considerăm un punct x cu $x_0 < x < x_1$, adică

$$0 < x - x_0 < x_1 - x_0 = \delta,$$

atunci observăm că

$$f(x_0) = y_0 < f(x) < f(x_1) = y_1 = y_0 + \varepsilon,$$

adică

$$0 < f(x) - f(x_0) < \varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

deci funcţia f este continuă la dreapta în punctul x_0. Analogic se demonstrează că funcţia f este continuă la stânga în punctul x_0, dacă x_0 nu este extremitatea din stânga a intervalului I. În aşa fel deducem că funcţia f este continuă pe I.

□

Exemple.

1. Funcţa exponenţială $f(x) = a^x$, $a > 0$ este o funcţie monoton crescătoare pe intervalul $(-\infty, +\infty)$, dacă $a > 1$ şi corespunzător monoton descrescătoare, dacă $0 < a < 1$. Valorile ei sunt pozitive şi umplu tot intervalul $(0, +\infty)$. Ca urmare, funcţia exponenţială este continuă pe $\mathbb{R}$.

2. Funcţia logaritmică $f(x) = \log_a x$, $(a > 0, a \neq 1)$ este crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$ dacă $a > 1$ şi este descrescătoare dacă $0 < a < 1$ şi primeşte toate valorile intervalului $(-\infty, +\infty)$. Prin urmare, funcţia dată este continuă pe intervalul $(0, +\infty)$.

3. Funcţiile trigonometrice $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ sunt funcţii continue pe domeniile sale de definiţie. De exemplu, continuitatea funcţiei $f(x) = \sin x$ pe segmentele $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$ rezultă din monotonia ei. De aici rezultă continuitatea funcţiei $f(x) = \sin x$ pe toată axa reală.

3.8.2 Existenţa şi continuitatea funcţiei inverse

Teorema 3.25. *Fie $f(x)$ o funcţie continuă şi strict crescătoare pe segmentul $[a, b]$ şi $A = f(a)$, $B = f(b)$. Atunci imaginea segmentului $[a, b]$ este segmentul $[A, B]$ şi funcţia $x = f^{-1}(y)$ inversă relativ la funcţia $y = f(x)$ este uniformă, strict crescătoare şi continuă pe segmentul $[A, B]$.*

Demonstraţie. Remarcăm, mai întâi, că în ipoteza teoremei s-ar putea de înlocuit termenul „crescătoare" cu termenul „descrescătoare" şi atunci în concluzie ar trebui de înlocuit segmentul $[A, B]$ cu segmentul $[B, A]$.

Observăm că dacă o funcţie f este definită şi continuă pe un anumit interval închis I, atunci valorile pe care le ia funcţia, când x parcurge intervalul I vor umple un anumit interval I_1. Într-adevăr, fie $m = \inf\limits_{x \in I} f(x)$ şi $M = \sup\limits_{x \in I} f(x)$, conform teoremei lui Weierstrass aceste valori sunt atinse în anumite puncte ale segmentului I, fie $f(x_m) = m$ şi $f(x_M) = M$. Pentru orice valoare $m < l < M$, conform teoremei despre atingerea valorilor intermediare există un punct $x_0 \in I$ astfel încât $f(x_0) = l$. Deci, pentru orice $l \in I_1 = [m, M]$ există un punct $x_0 \in I$ aşa încât $f(x_0) = l$.

Prin urmare, pentru fiecare valoare $y_0 \in [A, B]$ se va găsi cel puţin o valoare $x_0 \in [a, b]$ astfel încât $y_0 = f(x_0)$. Din monotonia strictă a funcţiei f reiese că această valoare x_0 este unică, căci, dacă vom admite că valoarea y_0 se atinge încă într-un punct $x_1 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_0$, atunci dacă, de exemplu $x_0 < x_1$, ar trebui să avem $y_0 = f(x_0) < f(x_1) = y_0$, ceea ce este imposibil. Deci, pe segmentul $[A, B]$ este definită funcţia $x = f^{-1}(y)$ inversă funcţiei $y = f(x)$.

Această funcţie, de asemenea este strict crescătoare. Într-adevăr, fie $y_1, y_2 \in [A, B]$ şi $y_1 < y_2$. Notăm $x_1 = f^{-1}(y_1)$ şi $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Dacă vom admite că $x_1 > x_2$, atunci vom avea $f(x_1) > f(x_2)$ adică $y_1 > y_2$, ceea ce contrazice faptul că $y_1 < y_2$. Deci funcţia inversă $x = f^{-1}(y)$ este monotonă şi valorile ei umplu segmentul $[a, b]$ şi conform teoremei despre continuitatea funcţiei monotone ea este continuă pe $[A, B]$. $\square$

Exemplu. Funcţia $y = \sin x$ este continuă şi strict monotonă pe segmentul $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Imaginea acestui segment prin funcţia $\sin x$ este segmentul $[-1, 1]$. Conform teoremei demonstrate mai sus, pe segmentul $[-1, 1]$ există funcţia inversă $x = \arcsin y$ care este strict crescătoare şi continuă pe acest segment.

Analogic ne convingem că funcţia $f(x) = \arccos x$ este continuă pe segmentul $[-1, 1]$, iar funcţiile $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ sunt continue pe intervalul $(-\infty, +\infty)$.

Teorema 3.26. *Fie $f(x)$ o funcţie continuă şi strict crescătoare pe intervalul (a, b) şi fie*

$$A = \inf_{x \in (a,b)} f(x), \qquad B = \sup_{x \in (a,b)} f(x),$$

unde în particular ar putea fi $a, A = -\infty$, $b, B = +\infty$. Atunci imaginea intervalului (a, b) este intervalul (A, B) şi funcţia $x = f^{-1}(y)$ inversă funcţiei $y = f(x)$ este bijectivă, strict crescătoare şi continuă pe intervalul (A, B).

Remarcăm că în ipoteza teoremei s-ar putea de înlocuit termenul „crescătoare" cu termenul „descrescătoare" şi atunci în concluzie ar trebui de înlocuit intervalul (A, B) cu intervalul (B, A).

Capitolul 4

Calculul diferenţial al funcţiilor de o variabilă reală

4.1 Derivata funcţiei într-un punct

4.1.1 Unele probleme care au condus la noţiunea de derivată

Una din noţiunile fundamentale ale analizei matematice şi în fond ale întregii ştiinţe este cea de derivată, atribuită de opotrivă lui Leibniz şi Newton. Această noţiune modelează ceea ce s-ar putea numi „viteza de variaţie" a unei funcţii, permite adâncirea studiului local şi global al funcţiilor şi în acelaşi timp stă la baza formulării matematice a numeroaselor legi ale fizicii. De altfel, Newton a introdus şi a utilizat în mod sistematic conceptul de derivată anume în legătură cu studiul legilor mecanice. Au existat două probleme care au condus la descoperirea noţiunii de derivată: una fizică – modelarea matematică a noţiunii intuitive de viteză a unui punct material, şi alta geometrică – problema despre trasarea tangentei la o curbă plană.

Problema despre determinarea vitezei instantanee (momentane) a unui mobil.

Fie că un punct material se mişcă rectiliniu de-a lungul unei axe l, în direcţia pozitivă a acestei axe şi fie că funcţia $s = s(t)$ exprimă distanţa parcursă de punctul material în momentul t de timp.

Fixăm un moment t_0 de timp, în acest moment punctul material se află la distanţa $s(t_0)$ de la origine. Şi fie $t = t_0 + \Delta t$ un moment arbitrar de timp. În acest moment punctul se află la distanţa $s(t) = s(t_0 + \Delta t)$ de la origine. În intervalul de timp $(t_0, t_0 + \Delta t)$ punctul material a parcurs o distanţa

$$\Delta s(t_0) = s(t) - s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0).$$

Dacă mişcarea punctului material ar fi fost uniformă, atunci viteza lui ar fi fost egală cu

$$\frac{\Delta s(t_0)}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Dacă mişcarea nu este uniformă, atunci raportul $\dfrac{\Delta s(t_0)}{\Delta t}$ nu este constant şi exprimă viteza medie a punctului material în intervalul de timp $(t_0, t_0 + \Delta t)$.

Practic nu există mişcări uniforme, dar în intervale foarte mici de timp ea tinde să devină uniformă, iar viteza medie respectivă tinde către o caracteristică a mişcării în momentul exact de timp t_0, care se numeşte *viteză instantanee* sau *momentană*

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

în ipoteza că această limită există.

Problema despre trasarea tangentei la o curbă plană.

Fie γ o curbă continuă pe plan şi fie A şi A' două puncte de pe curba γ. Dreapta S, care trece prin punctele A şi A' se numeşte *secantă* a curbei γ. Vom mişca punctul A' continuu de-a lungul curbei γ, apropiindu-l de punctul A. În acest proces, secanta S se va roti în jurul punctului A şi se poate întâmpla ca ea să tindă să ocupe o anumită poziţie pe deplin determinată a unei drepte care trece prin punctul A şi pe care o vom nota cu T. Dacă aceasta are loc, atunci spunem că curba γ în punctul A are tangentă, iar dreapta T o numim *tangentă* la γ în punctul A.

Nu orice curbă continuă are tangentă în fiecare punct al său.

Fie că, curba γ reprezintă graficul funcţiei $y = f(x)$, $x \in (a, b)$. Fixăm pe γ un punct A cu abscisa x_0. Îi dăm lui x_0 o creştere suficient de mică Δx, aşa ca $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Notăm cu A' punctul de pe γ cu abscisa $x_0 + \Delta x$ şi ordonata $f(x_0 + \Delta x)$. Secanta care trece prin punctele A şi A' formează cu direcţia pozitivă a axei Ox un unghi β, tangenta căruia este egală cu

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Dacă Δx tinde la zero, atunci din continuitatea lui f rezultă că şi Δy va tinde la zero, iar punctul A' se va apropia nelimitat de A. Se poate întâmpla (dar aceasta poate şi să nu se întâmple!) că atunci când $\Delta x \to 0$, raportul $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ va tinde la o anumită valoare limită k

$$\exists \ \ k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

În aceste condiţii, unghiul β va tinde la un unghi α diferit de $\dfrac{\pi}{2}$. Împreună cu unghiul β şi secanta S va tinde să ocupe poziţia bine determinată a tangentei T la curba γ în punctul A, care formează cu direcţia pozitivă a axei Ox unghiul α.

Aşadar, dacă există limita finită

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

atunci curba γ are tangentă în punctul cu abscisa x_0, panta căreia este egală cu valoarea acestei limite.

Observăm că ambele aceste probleme conduc la necesitatea efectuării următoarei operaţii: trebuie să calculăm limita de la raportul dintre creşterea funcţiei într-un punct către creşterea argumentului, în condiţia că creşterea argumentului tinde la 0. Această operaţie în matematică se numeşte *diferenţiere,* iar rezultatul ei se numeşte *derivată.*

4.1.2 Definiţia derivatei funcţiei într-un punct. Derivate laterale

Fie dată o funcţie $f(x)$ definită într-o anumită vecinătate a punctului x_0 şi fie x un punct arbitrar din această vecinătate.

Fie $\Delta x = x - x_0$ creşterea argumentului. Ei îi corespunde creşterea funcţiei

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Definiţia 4.1. Fie $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$. Dacă există limita (finită) a raportului dintre creşterea funcţiei şi creşterea argumentului , când creşterea argumentului tinde la 0, adică există

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

atunci acestă limită se numeşte *derivata funcţiei* $f(x)$ *în punctul* x_0 şi se notează cu unul dintre simbolurile

$$f'(x_0), \qquad \frac{df(x_0)}{dx}, \qquad \frac{df}{dx}(x_0), \qquad \dot{f}(x_0).$$

Aşadar

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definiţia 4.2. Fie $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$. Vom spune că funcţia $f(x)$ are în punctul x_0 *derivată infinită* egală cu $+\infty$ (coresp. $-\infty$) dacă

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = +\infty \qquad \left(\text{coresp.} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -\infty\right).$$

Definiţia 4.3. Fie $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$. *Derivatele laterale* ale funcţiei $f(x)$ în punctul x_0 se definesc astfel

$$f'(x_0 + 0) = f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \qquad \text{coresp.} \quad f'(x_0 - 0) = f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Teorema 4.1. *Fie* $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$*. Pentru ca în punctul* x_0 *să existe derivata* $f'(x_0)$ *a funcţiei* $f(x)$ *este necesar şi suficient ca în acest punct să existe derivata la stânga şi derivata la dreapta a funcţiei* $f(x)$ *şi ca ele să fie egale*

$$f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0).$$

Exemplu. Fie $f(x) = x|x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Dacă $x_0 > 0$, atunci ţinând cont de faptul că $\Delta x \to 0$, putem considera că $x_0 + \Delta x > 0$. Astfel

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 = 2|x_0|.$$

Dacă $x_0 < 0$, atunci ţinând cont de faptul că $\Delta x \to 0$, putem considera că $x_0 + \Delta x < 0$. Astfel

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -(x_0 + \Delta x)^2 + x_0^2 = -2x_0 \Delta x - (\Delta x)^2.$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x_0 \Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = -2x_0 = 2|x_0|.$$

Dacă $x_0 = 0$, atunci

$$f(0 + \Delta x) - f(0) = \Delta x|\Delta x| - 0 = \Delta x|\Delta x|.$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x| = 0.$$

În aşa fel

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{avem} \quad (x|x|)' = 2|x|.$$

Exerciţiu. Arătaţi că $\forall x \in \mathbb{R} : (x^3)' = 3x^2$.

Remarcă. Definiţia derivatei într-un punct are un caracter local. Mai exact aceasta înseamnă următoarle: comportarea la limită a raportului

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{când} \qquad x \to x_0$$

nu se va schimba, dacă pentru un $\delta > 0$ dat vom schimba valoarea funcţiei în exteriorul $\delta-$vecinătăţii punctului x_0.

4.1.3 Continuitatea funcţiei derivabile

Teorema 4.2. *Dacă o funcţie $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ are derivată în punctul x_0, atunci ea este continuă în acest punct.*

Demonstraţie. Conform ipotezei

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Deci

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \quad \text{unde} \quad \alpha(\Delta x) \to 0, \quad \text{când} \quad \Delta x \to 0.$$

De aici obţinem

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0).$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0,$$

ceea ce înseamnă că funcţia f este continuă în punctul x_0.

□

Remarcă. Afirmaţia inversă nu este adevărată: **Nu orice funcţie continuă într-un punct are derivată în acest punct.**

Exemplu. Fie $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Această funcţie este continuă pe $\mathbb{R}$ şi în particular în punctul $x_0 = 0$. Dar

$$f'(0-0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

şi

$$f'(0+0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Astfel

$$f'(0-0) \neq f'(0+0)$$

şi deci nu există derivata funcţiei date în punctul 0 deşi funcţia este continuă în acest punct.

4.1.4 Exemple de calcul al derivatelor

1. Fie $f(x) = C$, $C = const.$

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0,$$

deci

$$C' = 0.$$

2. Fie $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = (x + \Delta x - x)\left((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}\right) =$$
$$= \Delta x \cdot \left((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}\right).$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot ((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1})}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}\right) = nx^{n-1}.$$

Astfel

$$\forall x \in \mathbb{R} : (x^n)' = n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*.$$

3. Fie $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\frac{2x + \Delta x}{2}.$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\frac{2x + \Delta x}{2} = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Astfel

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\sin x)' = \cos x.$$

Exerciţiu. Arătaţi că $\forall x \in \mathbb{R} : (\cos x)' = -\sin x$.

4. Fie $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0, a \neq 1$.

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x \cdot \left(a^{\Delta x} - 1\right).$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \cdot \left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

Astfel

$$\forall x \in \mathbb{R} : (a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

În particular

$$\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x.$$

5. Fie $f(x) = \log_a x$, $x \in (0, +\infty)$, $a > 0, a \neq 1$.

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \ln a}.$$

Astfel

$$\forall x \in (0, +\infty) : (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

În particular

$$\forall x \in (0, +\infty) : (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

4.1.5 Regulile de diferenţiere de bază

Teorema 4.3. *Fie funcţiile* $u : U(x_0) \to \mathbb{R}$ *şi* $v : U(x_0) \to \mathbb{R}$ *au derivatele* $u'(x_0)$ *şi corespunzător* $v'(x_0)$ *în punctul* x_0. *Atunci:*

i) funcţia $u + v$ *are derivată în punctul* x_0 *şi*

$$(u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0);$$

ii) funcţia $u \cdot v$ *are derivată în punctul* x_0 *şi*

$$(u \cdot v)'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0);$$

iii) dacă $v(x_0) \neq 0$, *atunci funcţia* $\dfrac{u}{v}$ *are derivată în punctul* x_0 *şi*

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Demonstraţie. Îi dăm lui x_0 o creştere Δx. Funcţiile u şi v primesc respectiv creşterile

$$\Delta u(x_0) = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0), \qquad \Delta v(x_0) = v(x_0 + \Delta x) - v(x_0).$$

i) Fie $f(x) = (u+v)(x)$. Avem

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = u(x_0+\Delta x) + v(x_0+\Delta x) - (u(x_0) + v(x_0)) = \Delta u(x_0) + \Delta v(x_0).$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x_0) + \Delta v(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} = u'(x_0) + v'(x_0).$$

ii) Fie $f(x) = (u \cdot v)(x)$. Avem

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = u(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0 + \Delta x) - u(x_0) \cdot v(x_0) =$$
$$= (u(x_0) + \Delta u(x_0))(v(x_0) + \Delta v(x_0)) - u(x_0) \cdot v(x_0) =$$
$$= u(x_0)v(x_0) + u(x_0)\Delta v(x_0) + v(x_0)\Delta u(x_0) + \Delta u(x_0)\Delta v(x_0) - u(x_0)v(x_0) =$$
$$= u(x_0)\Delta v(x_0) + v(x_0)\Delta u(x_0) + \Delta u(x_0)\Delta v(x_0).$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0)\Delta v(x_0) + v(x_0)\Delta u(x_0) + \Delta u(x_0)\Delta v(x_0)}{\Delta x} =$$
$$= v(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} + u(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta v(x_0) \right) =$$
$$= u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0).$$

Aici am observat că

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta v(x_0) \right) = u'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

deoarece funcţia $v(x)$ având derivată în x_0 este continuă în acest punct şi deci $\Delta v(x_0) \to 0$, când $\Delta x \to 0$.

iii) Fie $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$. Avem

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{u(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u(x_0) + \Delta u(x_0)}{v(x_0) + \Delta v(x_0)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} =$$

$$= \frac{u(x_0)v(x_0) + v(x_0)\Delta u(x_0) - u(x_0)v(x_0) - u(x_0)\Delta v(x_0)}{v(x_0)(v(x_0) + \Delta v(x_0))} = \frac{v(x_0)\Delta u(x_0) - u(x_0)\Delta v(x_0)}{v(x_0)(v(x_0) + \Delta v(x_0))}.$$

Deci

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0)\Delta u(x_0) - u(x_0)\Delta v(x_0)}{\Delta x v(x_0)(v(x_0) + \Delta v(x_0))} =$$

$$= \frac{1}{v^2(x_0)} \lim_{\Delta x \to 0} \left(v(x_0)\frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} - u(x_0)\frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} \right) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

□

Exerciţiu. Arătaţi că

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

4.2 Funcţii diferenţiabile. Diferenţiala funcţiei

4.2.1 Noţiune de funcţie diferenţiabilă într-un punct. Condiţia necesară şi suficientă de diferenţiabilitate a unei funcţii într-un punct

Fie $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Definiţia 4.4. O funcţie $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ se numeşte *diferenţiabilă* în punctul x_0, dacă există un număr real $A \in \mathbb{R}$ şi o funcţie $\alpha : U(x_0) \to \mathbb{R}$ satisfăcând condiţia $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ astfel încât

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \quad \forall x \in U(x_0).$$

Sau, cu $x - x_0 = \Delta x$,

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha(x_0 + \Delta x)\Delta x, \quad \forall x_0 + \Delta x \in U(x_0),$$

sau, cu $\Delta x = h$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \alpha(x_0 + h) \cdot h, \quad \forall x_0 + h \in U(x_0).$$

Observăm că

$$\alpha(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

Cu alte cuvinte, o funcţie $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ se numeşte *diferenţiabilă* în punctul x_0, dacă pentru creşteri Δx suficient de mici ale argumentului, creşterea

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

a funcţiei poate fi scrisă ca sumă a doi termeni, unul liniar în raport cu creşterea argumentului Δx, iar al doilea un infinit mic de ordin superior în raport cu Δx

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

Teorema 4.4. *Pentru ca o funcţie $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ să fie diferenţiabilă în punctul x_0 este necesar şi suficient ca f să aibă derivată în acest punct.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Fie $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în punctul x_0, atunci conform definiţiei avem

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

De aici obţinem

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \to 0.$$

Trecem la limită în ultima egalitate cu $\Delta x \to 0$ şi obţinem

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A,$$

deci

$$\exists f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A.$$

Suficienţa. Fie că $\exists f'(x_0) = A$. Atunci conform definiţiei derivatei funcţiei avem

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A$$

şi deci

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

De aici obţinem

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad \Delta x \to 0.$$

Deci f este diferenţiabilă în punctul x_0.

□

Din această teoremă rezultă că constanta A din definiţia funcţiei diferenţiabile este întocmai derivata funcţiei f în punctul x_0. Deci creşterea unei funcţii f diferenţiabile într-un punct x_0 poate fi scrisă în forma

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

4.2.2 Noţiune de diferenţială. Aplicaţiile diferenţialei la calcule aproximative

Dacă f este diferenţiabilă în punctul x_0, atunci în creşterea ei putem evidenţia doi termeni: unul liniar în raport cu Δx, care se numeşte *partea liniară principală a creşterii funcţiei* şi celălalt infinit mic în raport cu Δx.

Definiţia 4.5. Dacă funcţia $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în punctul x_0, atunci partea liniară principală din creşterea funcţiei, adică funcţia liniară

$$h \mapsto A \cdot h, \quad \forall h \in \mathbb{R},$$

se numeşte *diferenţiala funcţiei* f şi se notează cu

$$df(x_0), \quad \text{sau} \quad df_{x_0}, \quad \text{sau} \quad df_{x_0}(h), \quad \text{sau} \quad df(x_0; h).$$

Deci,

$$df(x_0; h) = Ah = f'(x_0)h,$$

sau, cu $h = \Delta x$

$$df(x_0; \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Observăm că funcţia $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în toate punctele $x \in \mathbb{R}$ şi

$$df(x; \Delta x) = 1 \cdot \Delta x,$$

deci diferenţiala funcţiei identice este aceeaşi în toate punctele şi prin urmare putem folosi notaţia

$$dx = \Delta x.$$

Diferenţiala funcţiei identice se numeşte *diferenţiala variabilei independente.*

Aşadar, diferenţiala unei funcţii f diferenţiabile într-un punct x_0 este

$$df(x_0) = f'(x_0)dx,$$

de aici vine notaţia

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Pentru funcţia de o variabilă reală noţiunile de diferenţiabilitate şi derivabilitate sunt echivalente şi deci, dacă funţiile $u : U(x_0) \to \mathbb{R}$ şi $v : U(x_0) \to \mathbb{R}$ sunt diferenţiabile în punctul x_0, atunci şi funţiile $u \pm v$, $u \cdot v$ şi $\frac{u}{v}$, (în cazul când $v(x_0) \neq 0$) sunt diferenţiabile în punctul x_0 şi au loc formulele

$$d(u \pm v)(x_0; dx) = du(x_0, dx) \pm dv(x_0; dx),$$

$$d(uv)(x_0; dx) = v(x_0)du(x_0; dx) + u(x_0)dv(x_0; dx),$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)(x_0; dx) = \frac{v(x_0)du(x_0; dx) - u(x_0)dv(x_0; dx)}{v^2(x_0)}.$$

Fie că funcţia $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în punctul x_0, atunci creşterea ei în acest punct poate fi aproximată prin diferenţiala ei în acest punct

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0; dx),$$

adică

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x,$$

deci

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Ultima foarmulă se foloseşte la calcularea aproximativă a valorilor funcţiilor.

Exemplu. De calculat aproximativ valoarea expresiei $(9.14)^2 + \sqrt{9.14}$.

Fie $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$. Dacă considerăm $x = 9.14$, atunci observăm că $f(9.14) = (9.14)^2 + \sqrt{9.14}$. Pentru a calcula valoarea funcţiei în punctul $x = 9.14$ vom folosi formula de mai sus. Fie $x_0 = 9$, atunci $\Delta x = x - x_0 = 9.14 - 9 = 0.14$. Avem

$$f(x_0) = f(9) = 9^2+\sqrt{9} = 84, \qquad f'(x) = 2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f'(9) = 2\cdot 9+\frac{1}{2\sqrt{9}} = 18\frac{1}{6} = \frac{109}{6}.$$

Deci

$$f(9.14) = 9.14^2 + \sqrt{9.14} \approx 84 + \frac{109}{6} \cdot 0.14 = 84 + \frac{109 \cdot 0.7}{3} \approx 84 + 25.433 = 109.433.$$

4.3 Sensul geometric şi sensul fizic al derivatei şi diferenţialei funcţiei de o variabilă reală

4.3.1 Sensul geometric al derivatei funcţiei de o variabilă reală. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Din problema despre trasarea tangentei la graficul unei funcţii, cunoaştem că dacă există derivata finită $f'(x_0)$, atunci în punctul cu abscisa $x = x_0$ putem trasa tangenta la graficul funcţiei şi panta tangentei este

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0),$$

aici α este unghiul pe care-l foarmează tangenta cu direcţia pozitivă a axei Ox. În aşa fel, ecuaţia tangentei dusă la graficul funcţiei $y = f(x)$ în punctul $(x_0, f(x_0))$ este

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

adică

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Dacă $f'(x_0) \neq 0$, adică tangenta nu este paralelă cu axa Ox, atunci normala dusă la graficul funcţiei $y = f(x)$ în punctul $(x_0, f(x_0))$ este definită de ecuaţia

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

sau

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0).$$

Exemplul 1. Scrieţi ecuaţiile tangentei şi normalei duse la graficul funcţiei $y = x^3 - 3x$ în punctul cu abscisa $x_0 = -2$. Panta tangentei este

$$k = f'(-2) = (3x^2 - 3)\Big|_{x=-2} = 9, \qquad \text{iar} \qquad f(-2) = -2.$$

Ecuaţia tangentei este

$$y = 9(x + 2) - 2, \qquad \text{adică} \qquad y = 9x - 16.$$

Ecuaţia normalei este

$$y = \frac{1}{9}(x + 2) - 2, \qquad \text{adică} \qquad y = \frac{1}{9}x - \frac{16}{9}.$$

Exemplul 2. Fie $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Domeniul de definiţie al funcţiei este $D_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Observăm că în punctul $x_0 = 0$ funcţia nu este derivabilă, dar are derivatele laterale infinite

$$f'_-(0) = -\infty, \qquad f'_+(0) = +\infty.$$

Deci, în acest punct tangenta la graficul funcţiei este verticală.

Exemplul 3. Fie

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă} \quad x \leq 0 \\ \sin x, & \text{dacă} \quad x > 0. \end{cases}$$

Considerăm $x_0 = 0$.

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0, \qquad f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Deci în punctul cu abscisa $x_0 = 0$ nu există tangenta la graficul funcţiei date, dar există tangentele laterale în acest punct, care formează un unghi, un aşa punct se numeşte *punct unghiular* al graficului funcţiei.

4.3.2 Sensul geometric al diferenţialei funcţiei de o variabilă reală

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ o funcţie derivabilă în x_0 şi fie $f'(x_0) \neq 0$. Fie $A(x_0, f(x_0))$, $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ două puncte de pe graficul acestei funcţii.

Creşterea funcţiei la „trecerea" din punctul A în punctul B este

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = BD.$$

Notăm cu C punctul de intersecţiei cu dreapta BD a tangentei dusă la graficul funcţiei în punctul A. Avem

$$CD = AD \cdot \operatorname{tg} \alpha = \Delta x \cdot f'(x_0) = df(x_0).$$

În aşa fel, concludem că *diferenţiala funcţiei $f(x)$ în punctul x_0 este egală cu creşterea ordonatei punctului tangentei dusă la graficul funcţiei $y = f(x)$ în punctul $(x_0, f(x_0))$ la trecerea de la punctul cu abscisa x_0 la punctul cu abscisa $x_0 + \Delta x$.*

4.3.3 Sensul fizic al derivatei şi diferenţialei funcţiei de o variabilă reală

Sensul fizic al derivatei. Fie că un punct material se mişcă rectilinuu şi legea mişcării este definită de funcţia $s = s(t)$. Atunci viteza instantanee a punctului material în momentul de timp $t = t_0$ este

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Exemplu. Să calculăm viteza instantanee a unui automobil în momentul de timp $t = 5$ (ore) a cărui poziţie în momentul t este determinată de funcţia $s(t) = t^3 - 4t^2 + 10$ (km).

Avem

$$v(5) = s'(5) = \left(3t^2 + 8t\right)\Big|_{t=5} = 3 \cdot 5^2 + 8 \cdot 5 = 115 \quad (\text{km/h}).$$

Sensul fizic al diferenţialei. Aşa cum

$$ds(t_0; \Delta t) = s'(t_0) \cdot \Delta t = v(t_0) \cdot \Delta t$$

concludem că $ds(t_0; \Delta t)$ este distanţa pe care ar fi parcurs-o punctul material în intervalul de timp $(t_0, t_0 + \Delta t)$ dacă s-ar fi mişcat cu viteză constantă egală cu viteza instantanee în momentul t_0 de timp.

4.4 Derivata funcţiei inverse

4.4.1 Existenţa şi calculul derivatei funcţiei inverse

Teorema 4.5. *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă strict crescătoare (descrescătoare) derivabilă în punctul $x_0 \in I$ cu $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcţia inversă $f^{-1}(y)$ are derivată în* *punctul* $y_0 = f(x_0)$ *şi are loc formula*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Pe scurt ultima formulă se notează

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Demonstraţie. Fie imaginea intervalului I prin funcţia f este intervalul Y. Conform teoremei despre existenţa funcţiei inverse, pe intervalul Y există şi este continuă funcţia $x = f^{-1}(y)$ inversă funcţiei $y = f(x)$.

Fixăm $x_0 \in I$ şi îi dăm o creştere Δx a.î. $x_0 + \Delta x \in I$. Acestei creşteri îi corespunde creşterea funcţiei

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

de aici

$$y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) \in Y,$$

şi

$$\Delta f^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0+\Delta y)-f^{-1}(y_0) = f^{-1}(f(x_0+\Delta x))-f^{-1}(f(x_0)) = x_0+\Delta x-x_0 = \Delta x.$$

În plus, din continuitatea funcţiilor avem că $\Delta x \to 0$ dacă şi numai dacă $\Delta y \to 0$. Si deci

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Deci

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

4.4.2 Sensul geometric al derivatei funcţiei inverse

Fie că au loc condiţiile din Teorema 4.5. După cum se cunoaşte derivata $f'(x_0)$ este egală cu panta tangentei, adică cu tangenta unghiului α format cu direcţia pozitivă a axei Ox de către tangenta dusă la graficul funcţiei $y = f(x)$ în punctul cu abscisa x_0. Dar funcţia inversă $x = f^{-1}(y)$ are acelaşi grafic, doar că variabila independentă pentru ea este y şi se depune pe axa Oy. De aceea derivata $(f^{-1})'(y_0)$ este egală cu tangenta unghiului β format cu direcţia pozitivă a axei Oy de către aceeaşi dreaptă tangentă.

Astfel formula dedusă în Teorema 4.5 se reduce la relaţia cunoscută:

$$\text{dacă} \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \text{atunci} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

4.4.3 Calculul derivatelor funcţiilor trigonometrice inverse

1. $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Funcţia inversă este $x = \sin y$.

$$x'_y = \cos y, \quad \text{pentru} \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{avem} \quad x'_y = \cos y > 0.$$

Deci

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

2. $y = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, \pi]$. Funcţia inversă este $x = \cos y$.

$$x'_y = -\sin y, \quad \text{pentru} \quad y \in (0, \pi) \quad \text{avem} \quad x'_y = -\sin y > 0.$$

Deci

$$(\arccos x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

3. $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Funcţia inversă este $x = \operatorname{tg} y$.

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}, \quad \text{pentru} \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{avem} \quad x'_y > 0.$$

Deci

$$(\operatorname{arctg} x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

4. $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (0, \pi)$. Funcţia inversă este $x = \operatorname{ctg} y$.

$$x'_y = -\frac{1}{\sin^2 y}, \quad \text{pentru} \quad y \in (0, \pi) \quad \text{avem} \quad x'_y < 0.$$

Deci

$$(\operatorname{arcctg} x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

4.5 Derivata şi diferenţiala funcţiei compuse

4.5.1 Existenţa şi calculul derivatei funcţiei compuse

Teorema 4.6 (Regula lanţului). *Dacă funcţia $u = u(x)$ are derivată în punctul x_0, iar funcţia $y = f(u)$ are derivată în punctul $u_0 = u(x_0)$, atunci funcţia compusă $y = f(u(x))$ are derivată în punctul x_0 şi are loc formula*

$$y'(x_0) = f'(u_0) \cdot u'(x_0).$$

Ultima formulă poate fi scrisă în formele

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad \textit{sau} \qquad y'_x = f'_u \cdot u'_x.$$

Cu alte cuvinte, derivata funcţiei compuse este egală cu produsul dintre derivata funcţiei în raport cu variabila intermediară şi derivata variabilei intermediare în raport cu variabila independentă.

Demonstraţie. Deoarece funcţia $u = u(x)$ este derivabilă în x_0 rezultă că ea este definită într-o vecinătate $U(x_0)$ a acestui punct şi

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x_0).$$

Deoarece funcţia $y = f(u)$ este derivabilă în punctul $u_0 = u(x_0)$ rezultă că ea este definită într-o vecinătate a punctului u_0 şi deci are sens funcţia compusă $f(u(x))$ şi putem pune problema despre existenţa şi calculul derivatei ei în punctul x_0.

Deoarece $f(u)$ este derivabilă în punctul u_0, ea este şi diferenţiabilă în acest punct şi

$$\Delta y = f'(u_0) \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u, \quad \text{unde} \quad \lim_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u) = 0. \tag{4.1}$$

Vom considera $\alpha(0) = 0$. Cu o astfel de convenţie relaţia (4.1) rămâne adevărată, iar funcţia $\alpha(\Delta u)$ devine continuă pentru $\Delta u = 0$. Îi dăm lui x_0 o creştere Δx. Ea va implica creşterea Δu a funcţiei $u = u(x)$ care la rândul său va implica creşterea Δy a funcţiei $y = f(u)$ care se exprimă prin Δu după formula (4.1).

Dar Δy este în acelaşi timp creşterea funcţiei compuse $y = f(u(x))$ care corespunde creşterii Δx a variabilei x în punctul x_0.

Împărţim egalitatea (4.1) la Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Trecem la limită în ultima egalitate cu $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta u) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= f'(u_0) \cdot u'(x_0) + u'(x_0) \cdot \lim_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u) = f'(u_0) \cdot u'(x_0).$$

Aici am folosit faptul că atunci când $\Delta x \to 0$, din continuitatea funcţiei $u = u(x)$ avem că $\Delta u \to 0$ şi deoarece $\alpha(\Delta u)$ este continuă în $\Delta u = 0$ avem

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta u) = \lim_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u) = \alpha(0) = 0.$$

În aşa fel,

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0) \cdot u'(x_0).$$

□

Exemplul 1. $(\sin 3x)' = \cos 3x \cdot (3x)' = 3\cos 3x.$

Exemplul 2.

$$(\mathrm{tg}^3(2x-5))' = 3\mathrm{tg}^2(2x-5) \cdot (\mathrm{tg}(2x-5))' =$$

$$= 3\mathrm{tg}^2(2x-5) \cdot \frac{1}{\cos^2(2x-5)} \cdot (2x-5)' = \frac{6}{\cos^2(2x-5)}\mathrm{tg}^2(2x-5).$$

Exemplul 3. Să calculăm derivata funcţiei $y = \mathrm{ch}x$.

$$(\mathrm{ch}x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left((e^x)' + (e^{-x})'\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} \cdot (-x)'\right) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \mathrm{sh}x.$$

Exerciţii. Demonstraţi formulele

$$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(\mathrm{cth}x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

4.5.2 Diferenţiala funcţiei compuse. Invarianţa formei ei

Dacă funcţia $u = u(x)$ are derivată în punctul x_0, iar funcţia $y = f(u)$ are derivată în punctul $u_0 = u(x_0)$, atunci funcţia compusă $y = f(u(x))$ are derivată în punctul x_0 şi are loc formula

$$y'(x_0) = f'(u_0) \cdot u'(x_0).$$

Dar atunci diferenţiala funcţiei compuse este

$$dy(x_0; dx) = y'(x_0) \cdot dx = f'(u_0) \cdot u'(x_0) \cdot dx = f'(u_0) \cdot du(u_0; dx).$$

Deci forma de înscriere a diferenţialei funcţiei compuse nu depinde de aceea dacă este u variabilă independentă sau la rândul său ea însăşi este funcţie de o altă variabilă. De aceea formula

$$dy = f'(u)du$$

se numeşte *forma invariantă* de înscriere a diferenţialei funcţiei compuse.

4.5.3 Diferenţierea logaritmică

Să studiem funcţia

$$f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{dacă} \quad x > 0 \\ \ln(-x), & \text{dacă} \quad x < 0. \end{cases}$$

Domeniul de definiţie al ei este $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Deoarece

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x},$$

obţinem

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Aplicând regula lanţului avem

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Definiţia 4.6. Raportul $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ se numeşte *derivata logaritmică* a funcţiei $f(x)$.

Metoda diferenţierii logaritmice constă în aceea că mai întâi se află derivata logaritmică şi apoi se află însăşi derivata funcţiei după formula

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x).$$

Exemplul 1. Fie $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Avem

$$\ln|x^\alpha| = \alpha \cdot \ln|x|, \quad \text{deci} \quad f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x} \cdot x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exemplul 2. Fie

$$y = \frac{(x+2)^5 \cdot 2^{\sin x}}{\sqrt{(1+x^3)^5}}.$$

Avem

$$\ln|y| = 5\ln|x+2| + \sin x \cdot \ln 2 - \frac{5}{2}\ln|1+x^3|.$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{x+2} + \cos x \cdot 2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{3x^2}{1+x^3},$$

deci

$$y' = \left(\frac{5}{x+2} + 2\cos x - \frac{5}{2} \cdot \frac{3x^2}{1+x^3}\right) \cdot \frac{(x+2)^5 \cdot 2^{\sin x}}{\sqrt{(1+x^3)^5}}.$$

Exerciţiu. Calculaţi derivata funcţiei $y = x^{\cos x}$.

4.5.4 Derivarea funcţiilor definite parametric

Fie funcţiile $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ definite într-o vecinătate a punctului t_0 şi $x(t)$ este continuă şi strict monotonă. Atunci există funcţia inversă ei $t = t(x)$ şi într-o vecinătate a punctului $x_0 = x(t_0)$ are sens funcţia compusă $y = y(t(x))$, care se numeşte funcţie definită parametric de formulele

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in U(t_0). \end{cases}$$

Teorema 4.7. *Dacă funcţiile $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ sunt derivabile în punctul t_0, adică există $x'(t_0)$ şi $y'(t_0)$ şi dacă în plus $x'(t_0) \neq 0$, atunci funcţia definită parametric $y = y(t(x))$ este derivabilă în punctul $x_0 = x(t_0)$ şi are loc formula*

$$y'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)},$$

sau pe scurt

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Într-adevăr, aplicând regula lanţului şi teorema despre derivata funcţiei inverse avem

$$y'_x = (y(t(x)))'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Exerciţiu. Aflaţi y'_x dacă funcţia y este definită parametric de ecuaţiile

$$\begin{cases} x(t) = e^t \sin t, \\ y(t) = e^t \cos t. \end{cases}$$

4.5.5 Derivarea funcţiilor definite implicit

Fie că funcţia $y = y(x)$ este definită implicit de ecuaţia

$$F(x, y) = 0.$$

Aici $F(x, y(x))$ este o funcţiei compusă şi dacă există derivata $y'(x)$ atunci ea poate fi calculată derivând identitatea $F(x, y) = 0$ în raport cu x după regula lanţului.

Exemplu. Fie că funcţia $y(x)$ este definită implicit de ecuaţia

$$x^2y^3 + xy - 13 = 0.$$

Să aflăm derivata y'. Pentru aceasta derivăm ecuaţia dată ţinând cont de faptul că y este funcţie de x. Avem

$$2x \cdot y^3 + x^2 \cdot 3y^2 \cdot y' + y + x \cdot y' = 0,$$

de unde aflăm

$$(3x^2y^2 + x)y' = -(2xy^3 + y)$$

şi deci

$$y' = -\frac{2xy^3 + y}{3x^2y^2 + x}.$$

4.6 Derivate şi diferenţiale de ordin superior

4.6.1 Definiţia derivatelor de ordin superior

Definiţia 4.7. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie a cărei derivată există în fiecare punct din I. Dacă funcţia $f'(x)$ este la rândul său derivabilă într-un punct $x_0 \in I$, atunci spunem că funcţia f este de două ori derivabilă în x_0. În acest caz $(f')'(x_0)$ se numeşte *derivata a doua* a funcţiei f în x_0 şi se notează $f''(x_0)$. Deci

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) \qquad \text{sau} \qquad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)(x_0).$$

Procedând prin recurenţă, spunem că funcţia f este de k *ori derivabilă* în punctul x_0, dacă funcţia $f^{(k-1)}(x)$ este derivabilă în x_0. Deci

$$f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)})'(x_0) \qquad \text{sau} \qquad \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}\right)(x_0).$$

Când afirmăm că o funcţie f este de k ori derivabilă într-un punct x_0 subânţelegem că f are toate derivatele până la ordinul $k-1$ inclusiv, pe o vecinătate a lui x_0 şi că derivata de ordinul $k-1$ este derivabilă în x_0.

O funcţie f se numeşte *infinit derivabilă în* x_0 dacă ea admite derivate de orice ordin în acest punct.

Funcţiile elementare sunt infinit derivabile în orice punct interior mulţimii lor de definiţie.

Definiţia 4.8. O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte *continuu derivabilă de k ori* sau *de clasă* C^k pe intervalul I dacă f are toate derivatele până la ordinul k pe I şi derivata de ordinul k este continuă pe I.

Mulţimea funcţiilor de clasă C^k pe intervalul I se notează $C^k(I)$.
Prin $C^0(I) = C(I)$ se înţelege mulţimea funcţiilor continue pe I.
Prin $C^\infty(I)$ se notează mulţimea funcţiilor infinit derivabile pe I.

Exemple.
i) Fie $y = 2x^4 + 3x^2 + 1$. Să calculăm y'''. Avem

$$y' = 8x^3 + 6x, \qquad y'' = (y')' = 24x^2 + 6, \qquad y''' = (y'')' = 48x.$$

ii) Fie $y = a^x$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem

$$(a^x)^{(k)} = a^x \cdot (\ln a)^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

În particular

$$(e^x)^{(k)} = e^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Exerciţii. Demonstraţi că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ au loc formulele

$$(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

$$(\cos x)^{(k)} = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

4.6.2 Derivatele de ordinul n ale sumei a două funcţii şi ale produsului a două funcţii

Teorema 4.8. *Dacă $u \in C^n(I)$ şi $v \in C^n(I)$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $(u \pm v) \in C^n(I)$ şi are loc formula*

$$(u \pm v)^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x), \quad \forall x \in I.$$

Demonstraţie. Demonstrăm teorema prin inducţie.

Pentru $n = 1$ avem

$$(u \pm v)'(x) = u'(x) \pm v'(x),$$

ceea ce a fost demonstrat mai sus.

Admitem că formula are loc pentru $n = k$, adică avem

$$(u \pm v)^{(k)}(x) = u^{(k)}(x) \pm v^{(k)}(x), \quad \forall x \in I.$$

Fie $n = k + 1$. Conform definiţiei derivatei de ordinul $k + 1$ avem

$$(u \pm v)^{(k+1)}(x) = \left((u \pm v)^{(k)}\right)'(x) = \left(u^{(k)}(x) \pm v^{(k)}(x)\right)' = u^{(k+1)}(x) \pm v^{(k+1)}(x).$$

□

Teorema 4.9 (Formula lui Leibniz). *Dacă $u \in C^n(I)$ şi $v \in C^n(I)$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $(u \cdot v) \in C^n(I)$ şi are loc formula*

$$(u \cdot v)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x), \quad \forall x \in I.$$

Demonstraţie. Demonstrăm teorema prin inducţie.

Pentru $n = 1$ avem

$$(u \cdot v)' = u'v + uv',$$

ceea ce a fost demonstrat mai sus.

Admitem că formula are loc pentru $n = k$.

Să demonstrăm că formula lui Leibniz are loc şi pentru $n = k + 1$. Avem

$$(u \cdot v)^{(k+1)} = \left((u \cdot v)^{(k)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)} =$$

$$= C_n^0 u^{(n+1)} v + C_n^1 u^{(n)} v' + C_n^2 u^{(n-1)} v^{(2)} + \cdots + C_n^n u' v^{(n)} +$$

$$+ C_n^0 u^{(n)} v' + C_n^1 u^{(n-1)} v^{(2)} + \cdots + C_n^{n-1} u' v^{(n)} + C_n^n u v^{(n+1)} =$$

$$= u^{(n+1)} v + (C_n^0 + C_n^1) u^{(n)} v' + (C_n^1 + C_n^2) u^{(n-1)} v^{(2)} + \cdots + (C_n^{n-1} + C_n^n) u' v^{(n)} + u v^{(n+1)} =$$

$$= u^{(n+1)} v + C_{n+1}^1 u^{(n)} v' + C_{n+1}^2 u^{(n-1)} v^{(2)} + \cdots + C_{n+1}^n u' v^{(n)} + u v^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

Aici am folosit formula $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.

□

Exemplu. Fie $f(x) = x^2 e^{3x}$. Să se calculeze $f^{(10)}(x)$.
Vom aplica formula lui Leibniz.

$$f^{(10)}(x) = x^2 \cdot 3^{10} e^{3x} + 1. \cdot 2x \cdot 3^9 e^{3x} + 45 \cdot 2 \cdot 3^8 e^{3x} = 3^9 e^{3x} (3x^2 + 20x + 30).$$

Exerciţiu. Fie $f(x) = x^2 \sin x$. Să se calculeze $f^{(20)}(x)$.

4.6.3 Derivatele de ordin superior ale funcţiei compuse

Teorema 4.10. *Dacă funcţia $u = u(x)$ are derivată de ordinul doi în punctul x_0 şi funcţia $y = f(u)$ are derivată de ordinul doi în punctul $u_0 = u(x_0)$, atunci funcţia compusă $y = f(u(x))$ are derivată de ordinul doi în punctul x_0 şi are loc formula*

$$f''(x_0) = f''(u_0) \cdot (u'(x_0))^2 + f'(u_0) \cdot u''(x_0).$$

Pe scurt această formulă se scrie

$$y''_{xx} = y''_{uu} \cdot (u'_x)^2 + y'_u \cdot u''_{xx}.$$

Demonstraţie. Din existenţa derivatelor $u''(x_0)$ şi $y''(u_0)$ rezultă existenţa primelor derivate $u'(x)$ şi $y'(u)$ într-o anumită vecinătate a punctelor x_0 şi u_0 corespunzător. Prin urmare funcţiile $u(x)$ şi $y(u)$ sunt continue în punctele x_0 şi u_0 corespunzător. Deci în vecinătatea punctului x_0 are sens funcţia compusă $y(u(x))$. Avem

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x,$$

iar de aici obţinem

$$y''_{xx} = (y'_u \cdot u'_x)'_x = (y'_u)'_x \cdot u'_x + y'_u \cdot u''_{xx} = y''_{uu} \cdot (u'_x)^2 + y'_u \cdot u''_{xx}.$$

□

Exemplu. Să se demonstreze că funcţia $y = \sqrt{2x - x^2}$ satisface ecuaţia $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.

Fie $u = 2x - x^2$, atunci $u' = 2 - 2x$, $u'' = -2$. Avem $y = \sqrt{u}$ şi deci $y'_u = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ şi $y''_{uu} = -\dfrac{1}{4u\sqrt{u}}$. În aşa fel

$$y^3 \cdot y'' + 1 = u\sqrt{u}\left(-\frac{1}{4u\sqrt{u}} \cdot 4(1-x)^2 + \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (-2)\right) + 1 =$$

$$= -(1-x)^2 - u + 1 = -1 + 2x - x^2 - 2x + x^2 + 1 = 0.$$

4.6.4 Derivatele de ordin superior ale funcţiilor definite parametric

Fie funcţiile $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ definite într-o vecinătate a punctului t_0 şi $x(t)$ este continuă şi strict monotonă. Într-o vecinătate a punctului $x_0 = x(t_0)$ are sens funcţia compusă $y = y(t(x))$, care se numeşte funcţie definită parametric de formulele

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in U(t_0). \end{cases}$$

Teorema 4.11. *Dacă funcţiile $x = x(t)$ şi $y = y(t)$ sunt derivabile de două ori în punctul t_0, adică există $x''(t_0)$ şi $y''(t_0)$ şi dacă în plus $x'(t_0) \neq 0$, atunci funcţia definită parametric $y = y(t(x))$ este derivabilă de două ori în punctul $x_0 = x(t_0)$ şi are loc formula*

$$y''(x_0) = \frac{y''(t_0) \cdot x'(t_0) - x''(t_0) \cdot y'(t_0)}{(x'(t_0))^3}$$

sau pe scurt

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Demonstraţie. Aplicând regula lanţului şi teorema despre derivata funcţiei parametrice avem

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \frac{(y'_t)'_x x'_t - (x'_t)'_x y'_t}{(x'_t)^2} =$$

$$= \frac{y''_{tt} t'_x x'_t - x''_{tt} t'_x y'_t}{(x'_t)^2} = \frac{y''_{tt} - x''_{tt} \cdot \frac{y'_t}{x'_t}}{(x'_t)^2} = \frac{y''_{tt} x'_t - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}.$$

□

Exerciţiu. Aflaţi y''_{xx} dacă funcţia y este definită parametric de ecuaţiile

$$\begin{cases} x(t) = e^t \sin t, \\ y(t) = e^t \cos t. \end{cases}$$

4.6.5 Derivatele de ordin superior ale funcţiei inverse

Teorema 4.12. *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă strict crescătoare (descrescătoare) derivabilă de două ori în punctul $x_0 \in I$ cu $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcţia inversă $f^{-1}(y)$ este derivabilă de două ori în punctul $y_0 = f(x_0)$ şi are loc formula*

$$(f^{-1})''(y_0) = -\frac{f''(x_0)}{(f'(x_0))^3}.$$

Pe scurt ultima formulă se notează

$$x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}.$$

Demonstraţie. Conform Teoremei 4.5 avem

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Ca urmare

$$x''_{yy} = (x'_y)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_x \cdot x'_y = -\frac{1}{(y'_x)^2} \cdot y''_{xx} \cdot \frac{1}{y'_x} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}.$$

□

4.6.6 Diferenţialele de ordin superior ale unei funcţii. Nevalabilitatea invarianţei formei diferenţialei pentru diferenţialele de ordin superior

Definiţia 4.9. Spunem că o funcţie $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ este *de două ori diferenţiabilă în punctul* x_0 dacă funcţia $df(x; \Delta x) = f'(x)\Delta x$ este diferenţiabilă în punctul x_0 oricare ar fi $\Delta x \in \mathbb{R}$.

Dacă f este de două ori diferenţiabilă în x_0, atunci aplicaţia

$$d^2 f(x_0; \Delta x) = d(df)(x_0; \Delta x) = d(f'(x)\Delta x)(x_0; \Delta x) = (f'(x)\cdot\Delta x)'(x_0)\cdot\Delta x = f''(x_0)(\Delta x)^2$$

se numeşte *diferenţiala a doua* a funcţiei f în punctul x_0.

Definiţia 4.10. O funcţie $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ este *de k ori diferenţiabilă în punctul* x_0 dacă diferenţiala de ordinul $k-1$ a funcţiei f, adică

$$d^{k-1} f(x; \Delta x) = f^{(k-1)}(x)(\Delta x)^{k-1}$$

este diferenţiabilă în punctul x_0 oricare ar fi $\Delta x \in \mathbb{R}$.

În acest caz aplicaţia

$$d^k f(x_0; \Delta x) = d(d^{k-1} f)(x_0; \Delta x) = d(f^{(k-1)}(x)(\Delta x)^{k-1})(x_0; \Delta x) =$$

$$= (f^{(k-1)}(x) \cdot (\Delta x)^{k-1})'(x_0) \cdot \Delta x = f^{(k)}(x_0)(\Delta x)^k$$

se numeşte *diferenţiala de ordinul k* a funcţiei f în punctul x_0.

Teorema 4.13. *O funcţie $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ este de k ori diferenţiabilă în punctul x_0 dacă şi numai dacă f este de k ori derivabilă în x_0.*

Deoarece $\Delta x = dx$, putem scrie

$$d^k f(x_0) = f^{(k)}(x_0)dx^k.$$

Dacă funcţia $u = u(x)$ este diferenţiabilă de două ori în punctul x_0, iar funcţia $y = f(u)$ este diferenţiabilă de două ori în punctul $u_0 = u(x_0)$, atunci funcţia compusă $y = f(u(x))$ este diferenţiabilă de două ori în punctul x_0 şi avem

$$d^2y(x_0; dx) = d(dy)(x_0; dx) = d(y'(u) \cdot u'(x) \cdot dx)(x_0; dx) =$$

$$= y''(u_0) \cdot (u'(x_0))^2 dx^2 + y'(u_0) \cdot u''(x_0)dx^2 = y''(u_0)(du(x_0; dx))^2 + y'(u_0)d^2u(x_0; dx).$$

Deci forma de înscriere a diferenţialei de ordinul doi a funcţiei compuse nu posedă forma invariantă de înscriere, adică depinde de aceea dacă este u variabilă independentă sau la rândul său ea însăşi este funcţie de o altă variabilă.

Nici diferenţialele de ordin $k \geq 2$ nu au această proprietate. De exemplu, pentru funcţii diferenţiabile de trei ori, putem deduce formula

$$d^3y = f'''(u)du^3 + 3f''(u)du \cdot d^2u + f'(u)d^3u.$$

Capitolul 5

Teoremele de bază ale calculului diferenţial

5.1 Teoremele de medie

5.1.1 Teorema Fermat

Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$.

Definiţia 5.1. Punctul $x_0 \in I$ se numeşte *punct de extrem local* sau *relativ* al funcţiei f dacă există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât diferenţa $f(x) - f(x_0)$ păstrează semnul constant pentru orice $x \in I \cap U$. Dacă:

$f(x) - f(x_0) \leq 0$, $\forall x \in I \cap U$, atunci x_0 se numeşte *punct de maxim local,*

$f(x) - f(x_0) \geq 0$, $\forall x \in I \cap U$, atunci x_0 se numeşte *punct de minim local.*

Dacă diferenţa $f(x) - f(x_0)$ păstrează semnul constant pentru orice $x \in I$, atunci x_0 se numeşte *punct de extrem absolut* sau *global.*

Remarcă. Orice punct de extrem absolut este punct de extrem relativ. Reciproca nu este adevărată.

Teorema 5.1 (Teorema lui Fermat). *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ şi x_0 un punct de extrem al funcţiei f, interior lui I. Dacă funcţia f este derivabilă în punctul x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.*

Demonstraţie. Fie că punctul x_0 din interiorul intervalului I este un punct de maxim local al funcţiei f, atunci există o vecinătate $U(x_0)$ a lui x_0 astfel încât

$$\forall x \in U(x_0) \quad \text{avem} \quad f(x) \leq f(x_0).$$

Conform ipotezei există derivata $f'(x_0)$,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Fie $x = x_0 + \Delta x$, atunci dacă $\Delta x \to 0$ avem $x \to x_0$, adică

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{5.1}$$

şi această limită nu depinde de modul în care se apropie x de x_0, din stânga sau din dreapta. Dar pentru $x < x_0$ avem $x - x_0 < 0$ şi

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \tag{5.2}$$

deoarece $f(x) - f(x_0) \leq 0, \quad \forall x \in U(x_0)$.

Pentru $x > x_0$ avem $x - x_0 > 0$ şi

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \tag{5.3}$$

Trecând la limită în inegalităţile (5.2) şi (5.3) cu $x \to x_0$ ţinând cont de (5.1) obţinem
$\begin{cases} f'(x_0) \geq 0, \\ f'(x_0) \leq 0. \end{cases}$
Ceea ce este posibil doar atunci când $f'(x_0) = 0$.

□

Sensul geometric al Teoremei Fermat:

În condiţiile teoremei Fermat, tangenta dusă la graficul funcţiei $y = f(x)$ în punctul $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu axa Ox (deoarece $\text{tg}\alpha = f'(x_0) = 0$).

Remarcă. În demonstraţia teoremei esenţial este faptul că x_0 este un punct din interiorul intervalului I. Fără această ipoteză, teorema nu mai este adevărată: dacă funcţia f definită pe un segment atinge extremul său în una din extremităţile segmentului, atunci derivata funcţiei, dacă există, poate să fie diferită de zero.

Exemplu.

Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Avem

$$f_{min} = f(0) = 0, \qquad f_{max} = f(1) = 1,$$

dar $f'(x) = 1, \quad \forall x \in [0, 1]$, deci $f'(0) = f'(1) = 1 \neq 0$.

Teorema lui Fermat este o condiţie *necesară* de extrem.

Definiţia 5.2. Un punct $x_0 \in I$ se numeşte *punct staţionar* al funcţiei $f : I \to \mathbb{R}$, dacă f este derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) = 0$.

Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem ale unei funcţii derivabile sunt puncte staţionare.

5.1.2 Teorema Rolle

Teorema 5.2 (Teorema lui Rolle). *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă:*
(1) f este continuă pe $[a, b]$,
(2) f este derivabilă pe (a, b),
(3) $f(a) = f(b)$,
atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Demonstraţie. Funcţia f fiind continuă pe segmentul $[a, b]$, conform Teoremei lui Weierstrass, atinge pe el valorile sale maximă M şi minimă m. Sunt posibile două cazuri:

1. $M = m$. În acest caz, $f(x) \equiv const$ şi deci $f'(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$.

2. $M > m$. În acest caz cel puţin unul dintre numerele M sau m este diferit de valoarea comună $f(a) = f(b)$. Fie de exemplu $M \neq f(a)$. Atunci maximul funcţiei f pe segmentul $[a, b]$ se atinge într-un punct $c \in (a, b)$ şi deci c este un punct de extrem global pentru f şi conform Teoremei lui Fermat avem $f'(c) = 0$. Analogic analizăm cazul când $m \neq f(a)$.
□

Sensul geometric al Teoremei Rolle:

Dacă ordonatele extremităţilor curbei $y = f(x)$ sunt egale, atunci pe curbă există cel puţin un punct în care tangenta este paralelă cu axa Ox.

Remarca 1. Toate cele trei condiţii din ipoteza Teoremei lui Rolle sunt esenţiale.

Exemplul 1. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - [x]$. Funcţia f satisface condiţiile (2) şi (3) din teoremă, dar ea nu satisface condiţia (1), aşa cum f este discontinuă în punctul $x_0 = 1$. Observăm că $f'(x) = 1, \forall x \in (0, 1)$ şi deci Teorema lui Rolle nu are loc.

Exemplul 2. Fie $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Funcţia f satisface condiţiile (1) şi (3) din teoremă, dar ea nu satisface condiţia (2), aşa cum f nu este derivabilă în punctul $x_0 = 0$. Avem $f'(x) = -1$, dacă $-1 \leq x < 0$ şi $f'(x) = 1$, dacă $0 < x \leq 1$. Teorema lui Rolle nu are loc.

Exemplul 3. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Funcţia f satisface condiţiile (1) şi (2) din teoremă, dar ea nu satisface condiţia (3). Avem $f'(x) = 1$, $\forall x \in [0, 1]$ şi deci Teorema lui Rolle nu are loc.

Remarca 2. Teorema lui Rolle afirmă numai existenţa punctului $c \in (a, b)$, fără nici o precizare asupra unicităţii acestuia.

5.1.3 Teorema Lagrange

Teorema 5.3 (Teorema lui Lagrange). *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă:*
(1) f este continuă pe $[a, b]$,
(2) f este derivabilă pe (a, b),
atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Demonstraţie. Să considerăm o funcţie ajutătoare

$$F(x) = f(x) - \lambda x$$

şi să determinăm valoarea parametrului λ în aşa fel încât funcţia F să satisfacă ipoteza Teoremei lui Rolle. Observăm că primele două condiţii au loc pentru orice valoare $\lambda \in \mathbb{R}$. Avem

$$F(a) = f(a) - \lambda a, \qquad F(b) = f(b) - \lambda b$$

şi dacă cerem satisfacerea condiţiei $F(a) = F(b)$ găsim

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

În aşa fel funcţia

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$$

satisface ipoteza Teoremei lui Rolle şi deci

$$\exists c \in (a, b) \quad \text{a.î.} \quad F'(c) = 0,$$

dar

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

şi deci

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Sensul geometric al Teoremei lui Lagrange:

Mărimea $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ este egală cu tangenta unghiului format cu direcţia pozitivă a axei Ox de către coarda care uneşte punctele $A(a, f(a))$ şi $B(b, f(b))$ de pe graficul funcţiei $y = f(x)$. Mărimea $f'(c)$ este tangenta unghiului format cu direcţia pozitivă a axei Ox de către tangenta dusă la graficul funcţiei $y = f(x)$ în punctul cu abscisa c. Teorema lui Lagrange afirmă, că pe graficul funcţiei $y = f(x)$ există un punct C în care tangenta la curba respectivă este paralelă cu coarda AB.

Remarcă. Teorema lui Lagrange afirmă numai existenţa punctului $c \in (a, b)$, fără nici o precizare asupra unicităţii acestuia.

Din Teorema lui Lagrange rezultă că dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe I, atunci oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, există un punct ξ de forma $\xi = x_1 + \theta(x_2 - x_1)$, cu $\theta \in (0, 1)$, astfel încât

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi) \cdot (x_1 - x_2).$$

În particular, dacă $a, a+h \in I$, avem

$$f(a+h) = f(a) + f'(\xi)\cdot h, \quad \xi = a + \theta h, \quad \theta \in (0,1).$$

Teorema lui Lagrange se numeşte *prima teoremă de medie* a calculului diferenţial sau *teorema creşterilor finite.*

Corolar. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe $I \subset \mathbb{R}$ şi $f'(x) = 0$ pe I, atunci f este constantă pe I.

Într-adevăr oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, există un punct ξ de forma

$$\xi = x_1 + \theta(x_2 - x_1),$$

cu $\theta \in (0,1)$, astfel încât

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)\cdot(x_1 - x_2) = 0.$$

Astfel $f(x_1) = f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I$ şi deci funcţia f este constantă pe I.

De aici rezultă că dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe $I \subset \mathbb{R}$ şi $f'(x) = g'(x)$ pe I, atunci f şi g diferă printr-o constantă pe I.

5.1.4 Teorema Cauchy

Teorema 5.4 (Teorema lui Cauchy). *Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dacă:*

(1) f este continuă pe $[a,b]$,

(2) f este derivabilă pe (a,b),

(3) $g'(x) \neq 0, x \in (a,b)$,

atunci există un punct $c \in (a,b)$ astfel încât

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demonstraţie. Remarcăm că în condiţiile teoremei avem $g(a) \neq g(b)$, deoarece în caz contrar aplicând la funcţia g Teorema lui Rolle, ar exista un punct $c \in (a,b)$ a.î. $g'(c) = 0$, ceea ce contrazice condiţia (3).

Să considerăm funcţia ajutătoare

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x)$$

şi să determinăm valoarea parametrului λ în aşa fel încât funcţia F să satisfacă ipoteza Teoremei lui Rolle. Observăm că primele două condiţii au loc pentru orice valoare $\lambda \in \mathbb{R}$. Avem

$$F(a) = f(a) - \lambda g(a), \qquad F(b) = f(b) - \lambda g(b)$$

şi dacă cerem satisfacerea condiţiei $F(a) = F(b)$ găsim

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

În aşa fel funcţia

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$$

satisface ipoteza Teoremei lui Rolle şi deci

$$\exists c \in (a, b) \quad \text{a.î.} \quad F'(c) = 0,$$

dar

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

şi deci

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

Teorema lui Cauchy se numeşte *a doua teoremă de medie* a calculului diferenţial.

Teorema 5.5 (Teorema lui Darboux). *Dacă funcţia f este derivabilă pe I, atunci funcţia f' are proprietatea lui Darboux pe I, adică nu poate trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare.*

5.2 Ridicarea nedeterminărilor (regulile lui l'Hospital)

5.2.1 Ridicarea nedeterminărilor de forma $\frac{0}{0}$

Teorema 5.6 (Regula lui l'Hospital). *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in [a, b]$. Dacă:*

(1) f şi g sunt derivabile pe $(a, b) \setminus \{x_0\}$ şi continue în x_0,

(2) $f(x_0) = 0, \quad g(x_0) = 0$,

3) $g'(x) \neq 0$, într-o vecinătate găurită a lui x_0,

4) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$,

atunci există şi limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ şi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda.$$

Demonstraţie. Pentru orice $x \in [a, b]$ funcţiile f şi g satisfac ipoteza Teoremei lui Cauchy pe segmentul cu extremităţile în punctele x şi x_0. Deci, există un punct c_x situat între x şi x_0 astfel încât are loc egalitatea

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Dacă $x \to x_0$, atunci $c_x \to x_0$ şi conform condiţiei (4) există limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x \to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lambda.$$

□

Remarcăm că nu este necesar ca funcţiile f şi g să aibă derivată în însăşi punctul x_0. În plus, observăm că aici se includ şi cazurile când $\lambda = -\infty$ şi $\lambda = +\infty$.

Exemplu. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{2x-2}$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{2x-2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 1} \frac{\pi \cos \pi x}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Remarcă. Dacă funcţiile f şi g au derivate de ordin superior, care la rândul său satisfac ipoteza teoremei de mai sus şi de exemplu $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$, atunci putem aplica regula lui l'Hospital pentru câtul $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exemplu. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2}}{-\sin x} = \left|\frac{0}{0}\right| = -2\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}{\cos x} = -2.$$

Teorema 5.7 (Regula lui l'Hospital). *Fie* $f, g : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$. *Dacă:*

(1) f *şi* g *sunt derivabile pe* $(c, +\infty)$,

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

3) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (c, +\infty)$,

4) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$,

atunci există şi limita $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *şi*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda.$$

Demonstraţie. Efectuăm schimbarea de variabilă $x = \dfrac{1}{t}$. Dacă $x \to +\infty$ atunci $t \to 0$. Intervalul $(c, +\infty)$ se aplică pe intervalul $\left(0, \dfrac{1}{c}\right)$. Pe intervalul $\left(0, \dfrac{1}{c}\right)$ au sens funcţiile compuse

$$\varphi(t) = f\left(\frac{1}{t}\right), \qquad \psi(t) = g\left(\frac{1}{t}\right),$$

care sunt diferenţiabile pe intervalul $\left(0, \dfrac{1}{c}\right)$. Avem

$$\varphi'(t) = \left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'_t = f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right); \qquad \psi'(t) = \left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'_t = g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right).$$

În plus,

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{t\to 0} \psi(t) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Aşa cum $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (c, +\infty)$, avem $\psi'(t) \neq 0$, $\forall t \in \left(0, \dfrac{1}{c}\right)$. Astfel avem

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda.$$

Aşadar, sunt satisfăcute condiţiile Teoremei 5.6 şi deci $\exists \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \lambda$, dar

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

$\square$

Exemplu. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to +\infty} \frac{-2\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 2\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 2\cdot 1 = 2.$$

5.2.2 Ridicarea nedeterminărilor de forma $\dfrac{\infty}{\infty}$

Teorema 5.8 (Regula lui l'Hospital). *Fie date două funcţii f şi g. Dacă*

(1) f şi g sunt diferenţiabile într-o vecinătate a punctului finit sau infinit x_0 (în particular, în vecinătatea din stânga sau din dreapta) cu excepţia posibilă a punctului x_0,

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$,

(3) $g'(x) \neq 0$, în vecinătatea lui x_0,

(4) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

atunci

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplul 1. Fie $\alpha > 0$. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha}\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0.$$

Deci, dacă $\alpha > 0$, atunci funcţia putere x^α creşte mai repede decât funcţia logaritmică, când $x \to +\infty$.

Exemplul 2. Fie $\alpha > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha\cdot x^{\alpha-1}}{a^x\cdot\ln a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-[\alpha]-1)x^{\alpha-[\alpha]-1}}{a^x\cdot(\ln a)^{[\alpha]+1}}=0.$$

Deci, dacă $\alpha>0$, atunci funcţia putere x^α creşte mai încet decât funcţia exponenţială, când $x\to+\infty$.

5.2.3 Ridicarea nedeterminărilor de formele $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

În alte cazuri nedeterminate, aşa ca:

$$\infty-\infty,\quad 0\cdot\infty,\quad 1^\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0$$

nu există reguli de tipul regulilor lui l'Hospital. Aceste cazuri, cu ajutorul transformărilor echivalente, trebuie reduse la cazurile $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplul 1. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\cdot e^{-\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty}x^3\cdot e^{-\infty}=|0\cdot\infty|=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{e^x}=\frac{6}{\infty}=0.$$

Exemplul 2. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\ln x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to1}\frac{-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}(-x)=-1.$$

Exemplul 3. Să se calculeze limita $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=|1^\infty|=\lim_{x\to1}e^{\ln x\cdot\frac{1}{1-x}}=e^{\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}}=e^{-1}=\frac{1}{e},$$

deoarece

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-\lim_{x\to1}\frac{1}{x}=-1.$$

5.3 Formula lui Taylor

5.3.1 Formula lui Taylor pentru un polinom

Fie

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n,\quad a_n\neq0$$

un polinom de grad n înscris după puterile lui x.

Polinomul $P(x)$ poate fi scris după puterile diferenţei $x - x_0$, oricare ar fi $x_0 \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, fie $t = x - x_0$, atunci $x = t + x_0$ şi deci

$$P(t + x_0) = a_0 + a_1(t + x_0) + a_2(t + x_0)^2 + \cdots + a_n(t + x_0)^n.$$

Ridicând termenii din membrul drept al ultimei egalităţi la puterile respective şi grupând termenii cu puterile egale ale lui t vom obţine

$$P(t + x_0) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_n t^n.$$

Revenind la variabila x, definitiv avem

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots + b_n(x - x_0)^n.$$

Să aflăm coeficienţii b_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Observăm că

$$P(x_0) = b_0.$$

Din

$$P'(x) = b_1 + 2b_2(x - x_0) + 3b_3(x - x_0)^2 + \cdots + nb_n(x - x_0)^{n-1}$$

aflăm

$$P'(x_0) = b_1.$$

Din

$$P''(x) = 2b_2 + 3 \cdot 2b_3(x - x_0) + \cdots + n \cdot (n-1)b_n(x - x_0)^{n-2}$$

aflăm

$$P''(x_0) = 2b_2, \quad \text{de unde găsim} \quad b_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}.$$

Derivând consecutiv polinomul $P(x)$ determinăm

$$P^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \ldots \cdot 1 \cdot b_n = n! b_n, \quad \text{de unde găsim} \quad b_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

În aşa fel coeficienţii polinomului se exprimă prin valorile polinomului şi ale derivatelor lui în punctul x_0. Definitiv determinăm

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{5.4}$$

Formula (5.4) se numeşte *formula lui Taylor pentru polinom.*

Dacă $x_0 = 0$ obţinem *formula lui Mac-Laurin*

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{5.5}$$

5.3.2 Formula lui Taylor pentru funcţii de o variabilă reală

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de n ori derivabilă în punctul $x_0 \in I$. Prin analogie cu formula (5.4) putem alcătui polinomul

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

pe care îl vom numi *polinomul lui Taylor de gradul n al funcţiei f în punctul x_0*.

Notăm

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), x \in I$$

şi numim această funcţie *restul lui Taylor de ordinul n al funcţiei f în punctul x_0*.

Din egalitatea de mai sus avem

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad \forall x \in I,$$

adică

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \quad \forall x \in I. \tag{5.6}$$

Formula (5.6) se numeşte *formula lui Taylor de ordinul n a funcţiei f în punctul x_0*.

Dacă funcţia $f(x)$ nu este un polinom, atunci $R_n(x) \not\equiv 0$. Deoarece

$$\lim_{x \to x_0} R_n(x) = 0,$$

pentru valori ale lui x suficient de apropiate de x_0, polinomul $T_n(x)$ aproximează funcţia $f(x)$, adică $f(x) \approx T_n(x)$.

5.3.3 Forma lui Lagrange al restului lui Taylor

Vom considera în continuare că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este de $n + 1$ ori derivabilă pe I şi vom determina forma restului lui Taylor. Vom căuta funcţia $R_n(x)$ în forma

$$R_n(x) = \frac{M}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

unde $M = M(x)$ este o funcţie de variabilă x care urmează a fi determinată.

Fixăm în mod arbitrar un punct $a \neq x_0$ în intervalul I şi notăm $M(a) = M_0$. Atunci

$$R_n(a) = \frac{M_0}{(n + 1)!}(a - x_0)^{n+1}.$$

Prin urmare,

$$f(a) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(a-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(a-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(a-x_0)^n+\frac{M_0}{(n + 1)!}(a-x_0)^{n+1}. \tag{5.7}$$

Cu scopul de a afla valoarea M_0 să considerăm o funcţie ajutătoare

$$F(x) = f(x) - \left(f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{M_0}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right).$$

Prin înlocuire ne convingem că

$$F(x_0) = 0, \quad F(a) = 0.$$

Funcţia $F(x)$ ca diferenţă dintre funcţia $f(x)$ şi un polinom este de asemenea derivabilă de $n+1$ ori pe intervalul I. Să calculăm aceste derivate.

$$F'(x) = f'(x) - \left(f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{M_0}{n!}(x-x_0)^n \right),$$

$$F''(x) = f''(x) - \left(f''(x_0) + \frac{f'''(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + \frac{M_0}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \right),$$

....

$$F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - \left(f^{(n)}(x_0) + \frac{M_0}{1!}(x-x_0) \right),$$

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - M_0.$$

Observăm că

$$F(x_0) = F(a) = 0, F'(x_0) = 0, F''(x_0) = 0, \ldots, F^{(n)}(x_0) = 0.$$

Funcţia $F(x)$ satisface condiţiile teoremei lui Rolle şi deci între punctele x_0 şi a se va găsi un punct ξ_1 astfel încât $F'(\xi_1) = 0$.

Deoarece $F'(x_0) = F'(\xi_1) = 0$, conform teotemei lui Rolle între punctele x_0 şi ξ_1, deci între punctele x_0 şi a, se va găsi un punct ξ_2 astfel încât $F''(\xi_2) = 0$.

Prelungind raţionamentul concludem că între punctele x_0 şi a există un punct ξ_n astfel încât

$$F^{(n)}(\xi_n) = 0.$$

Deoarece $F^{(n)}(x_0) = 0$ şi $F^{(n)}(\xi_n) = 0$ atunci între pnctele x_0 şi ξ_n, deci şi între punctele x_0 şi a exstă un punct ξ, astfel încât $F^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Dar $F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - M_0$ şi deci $M_0 = f^{(n+1)}(\xi)$. Înlocuind valoarea găsită pentru M_0 în (5.7) obţinem

$$f(a) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(a-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(a-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(a-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(a-x_0)^{n+1}, \tag{5.8}$$

unde ξ este un punct dintre x_0 şi a.

Deoarece a este un punct arbitrar al intervalului I în egalitatea (5.8) putem înlocui în loc de a punctul arbitrar x al intervalului. Obţinem

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{5.9}$$

unde ξ este un punct dintre x_0 şi x.

Egalitatea (5.9) se numeşte *formula lui Taylor cu restul lui Taylor în forma lui Lagrange,*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

unde ξ este un punct situat între x_0 şi x. Punctul ξ poate fi înscris în forma

$$\xi = x_0 + \theta(x - x_0), \quad \text{unde } \; 0 < \theta < 1,$$

deci

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

5.3.4 Forma lui Peano al restului lui Taylor

Să determinăm comportarea restului lui Taylor când x tinde la x_0. Să admitem că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ este de clasă C^n pe intervalul I. Înlocuind în formula (5.9) n cu $n-1$ obţinem

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Din continuitatea lui $f^{(n)}(x)$ în punctul x_0 avem

$$\lim_{x\to x_0} f^{(n)}(\xi) = \lim_{\xi\to x_0} f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(x_0),$$

deci putem scrie

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x),$$

unde $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Dar atunci

$$\alpha(x) \cdot (x-x_0)^n = o((x-x_0)^n).$$

Definitiv obţinem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \tag{5.10}$$

aici restul lui Taylor are forma

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n). \tag{5.11}$$

De fapt forma restului este necunoscută, dar se stie că el este un infinit mic de ordin n în raport cu diferenţa $x - x_0$. Forma (5.11) a restului lui Taylor a fost indicată de către matematicianul italian Giuseppe Peano (27.08.1858 – 20.04.1932).

Dacă în (5.10) vom înlocui $x - x_0$ cu Δx şi vom trece $f(x_0)$ în membrul stâng, vom obţine formula

$$\Delta f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}\Delta x^n + o((\Delta x)^n).$$

Dacă $0 \in I$ atunci putem lua $x_0 = 0$ şi din (5.9) şi (5.10) obţinem formulele lui Mac-Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

5.3.5 Formula lui Taylor pentru unele funcţii elementare

Exemplul 1. Să dezvoltăm în serie Mac-Laurent funcţia $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n+1)}(x) = e^x; \quad f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1$$

Deci funcţia e^x are dezvoltarea Mac-Laurin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

unde $\xi = \theta x$, $\theta \in (0,1)$.

Exemplul 2. Să dezvoltăm în serie Mac-Laurent funcţia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x,$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x, \ldots, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right);$$

$$f(0) = f''(0) = \ldots = f^{(2k)}(0) = 0, \qquad f^{(2k-1)}(x) = (-1)^{k-1}.$$

Deci funcţia $\sin x$ are dezvoltarea Mac-Laurin

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin\xi,$$

unde $\xi = \theta x$, $\theta \in (0,1)$.

Exemplul 3. Funcţia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ are dezvoltarea Mac-Laurent

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos(\theta x), \quad \theta \in (0,1).$$

Exemplul 4. Funcţia $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1,+\infty)$ are dezvoltarea Mac-Laurent

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k!} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad \theta \in (0,1).$$

Exemplul 5. Funcţia $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x \in (-1,+\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, are dezvoltarea Mac-Laurent

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k +$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n+1}, \quad \theta \in (0,1).$$

5.4 Rolul derivatei de ordinul I la studiul funcţiilor

5.4.1 Condiţia suficientă de creştere (descreştere) a unei funcţii

Teorema 5.9. *Dacă funcţia f este continuă pe segmentul $[a,b]$ şi diferencţiabilă pe intervalul (a,b), atunci pentru ca funcţia f să fie strict crescătoare (corespunzător, strict descrescătoare) pe intervalul (a,b) este suficient ca*

$$f'(x) > 0 \quad (\textit{corespunzător} \;\; f'(x) < 0), \textit{pentru toţi} \;\; x \in (a,b).$$

Demonstraţie. Fie că $f'(x) > 0$, pentru toţi $x \in (a,b)$. Să fixăm în mod arbitrar două puncte $a < x_1 < x_2 < b$. Atunci pe segmentul $[x_1,x_2]$ funcţia f satisface condiţiile teoremei Lagrange. Prin urmare, pe intervalul (x_1,x_2) există un punct ξ aşa încât

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Deoarece $x_2 - x_1 > 0$, iar conform ipotezei şi $f'(\xi) > 0$, avem $f(x_2) - f(x_1) > 0$, adică

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Astfel, pentru orice puncte $x_1 < x_2$ din intervalul (a,b) avem $f(x_1) < f(x_2)$, ceea ce înseamnă că funcţia f este strict crescătoare pe intervalul (a,b).

□

Remarca 1. Condiţia $f'(x) > 0$ (corespunzător $f'(x) < 0$) nu este necesară pentru creşterea (corespunzător, descreşterea) funcţiei $f(x)$ pe intervalul dat.

De exemplu, funcţia $f(x) = x^3$ este strict crescătoare pe tot intervalul $(-\infty, +\infty)$, deşi derivata ei $f'(x) = 3x^2$ se anulează în punctul $x = 0$.

Remarca 2. Dacă o funcţie f este continuă pe intervalul (a, b) şi are derivata pozitivă (corespunzător negativă) pe acest interval, cu excepţia unui număr finit de puncte în care derivata se anulează sau nu există, atunci funcţia f este strict crescătoare (corespunzător, strict descrescătoare) pe intervalul (a, b). Această afirmaţie reiese nemijlocit din teorema de mai sus, aplicată pe fiecare interval component în care derivata funcţiei îşi păstrează semnul.

Exemplu.

Aflaţi intervalele de monotonie ale funcţiei $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$.

Observăm că funcţia f este definită pe $\mathbb{R}$. Aflăm derivata

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2.$$

Determinăm punctele în care derivata se anulează, rezolvând ecuaţia $f'(x) = 0$.

$$5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x-3) = 0.$$

Deci $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. Aceste puncte împart axa reală în 4 intervale. Pe intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ şi $(3, +\infty)$ derivata f' este pozitivă, iar pe intervalul $(1, 3)$ derivata f' este negativă. Deci funcţia este crescătoare pe mulţimile $(-\infty, 1]$ şi $[3, +\infty)$, şi descrescătoare pe $[1, 3]$.

5.4.2 Puncte de extrem, extremele funcţiei. Condiţia necesară de existenţă a extremului unei funcţii. Puncte staţionare. Puncte critice

Să reactualizăm unele noţiuni. Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$.

Definiţia 5.3. Punctul $x_0 \in I$ se numeşte *punct de extrem local* sau *relativ* al funcţiei f dacă există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât diferenţa $f(x) - f(x_0)$ păstrează semnul constant pentru orice $x \in I \cap U$. Dacă:

$f(x) - f(x_0) \leq 0$, $\forall x \in I \cap U$, atunci x_0 se numeşte *punct de maxim local,*

$f(x) - f(x_0) \geq 0$, $\forall x \in I \cap U$, atunci x_0 se numeşte *punct de minim local.*

Dacă diferenţa $f(x) - f(x_0)$ păstrează semnul constant pentru orice $x \in I$, atunci x_0 se numeşte *punct de extrem absolut* sau *global.*

Valoarea funcţiei f într-un punct de extrem al său se numeşte *extremul* funcţiei.

Remarcă. Orice punct de extrem absolut este punct de extrem relativ. Reciproca nu este adevărată.

Condiţia necesară de existenţă a punctului de extrem al unei funcţii este dată de teorema lui Fermat.

Teorema 5.10 (Teorema lui Fermat). *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ şi x_0 un punct de extrem al funcţiei f, interior lui I. Dacă funcţia f este derivabilă în punctul x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.*

Remarca 1. Egalitatea cu zero a derivatei funcţiei în punctul x_0 este numai o condiţie necesară de existenţă a extremului, nu şi suficientă. Aşa, de exemplu, funcţia $f(x) = x^3$ are derivata egală cu zero în punctul $x_0 = 0$, dar în acest punct funcţia nu are extrem.

Definiţia 5.4. Un punct $x_0 \in I$ se numeşte *punct staţionar* al funcţiei $f : I \to \mathbb{R}$, dacă f este derivabilă în x_0 şi $f'(x_0) = 0$.

Remarca 2. O funcţie poate avea extrem şi în acele puncte în care derivata ei nu există sau este infinită, în condiţia că funcţia este continuă în aceste puncte.

Exemplu.

Funcţia $f(x) = |x|$ este continuă pe $\mathbb{R}$. În punctul $x_0 = 0$ ea are un minim global, $f(0) = 0$, dar nu este derivabilă în acest punct ($f'(0-0) = -1$, $f'(0+0) = 1$).

Funcţia $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ este definită pe $\mathbb{R}$ şi are în punctul $x_0 = 0$ un minim global, $f(0) = 0$. În acest punct funcţia f nu este derivabilă, dar

$$f'(0-0) = -\infty, \quad f'(0+0) = +\infty.$$

Definiţia 5.5. Punctele în care derivata funcţiei f este egală cu zero, nu există sau este infinită se numesc *puncte critice* ale funcţiei f.

Exemplu. Aflaţi punctele critice ale funcţiei $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, $D_f = [-1, 1]$.

Aflăm derivata funcţiei

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Domeniul de definiţie al derivatei $D_{f'} = (-1, 1)$. Rezolvând ecuaţia $f'(x) = 0$ aflăm punctele staţionare

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Derivatele laterale în punctele $x_3 = -1$ şi $x_4 = 1$ sunt infinite, dar funcţia este definită în aceste puncte. Deci funcţia dată are patru puncte critice

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 1.$$

5.4.3 Condiţiile suficiente de existenţă a extremului local al unei funcţii

Vom conveni să spunem că funcţia $f(x)$ îşi schimbă semnul din minus în plus la trecerea prin punctul x_0, dacă $f(x) < 0$ în punctele $x < x_0$ suficient de apropiate de x_0 şi $f(x) > 0$ în punctele $x > x_0$ suficient de apropiate de x_0.

Vom conveni să spunem că funcţia $f(x)$ îşi schimbă semnul din plus în minus la trecerea prin punctul x_0, dacă $f(x) > 0$ în punctele $x < x_0$ suficient de apropiate de x_0 şi $f(x) < 0$ în punctele $x > x_0$ suficient de apropiate de x_0.

Teorema 5.11 (Condiţiile suficiente de existenţă a punctului de extrem local). *Fie funcţia $f(x)$ este continuă într-o vecinătate $U(x_0)$ a punctului critic x_0 şi este diferenţiabilă peste tot în această vecinătate cu excepţia posibilă a punctului x_0. Dacă derivata ei $f'(x)$ la trecerea prin punctul x_0 îşi schimbă semnul*

i) din plus în minus, atunci x_0 este un punct de maxim pentru f;

ii) din minus în plus, atunci x_0 este un punct de minim pentru f.

Demonstraţie. Fie că la trecerea prin punctul x_0 derivata $f'(x)$ îşi schimbă semnul din plus în minus. Fixăm în mod arbitrar un punct $x \in U(x_0)$. Aplicând teorema lui Lagrange, găsim un punct ξ care se află între punctele x_0 şi x astfel încât

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0).$$

Dacă $x < x_0$, atunci conform ipotezei $f'(\xi) > 0$ şi deci

$$f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0).$$

Dacă $x > x_0$, atunci conform ipotezei $f'(\xi) < 0$ şi deci

$$f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0).$$

Prin urmare, peste tot în vecinătatea considerată a punctului x_0 avem

$$f(x) < f(x_0),$$

ceea ce înseamnă că punctul x_0 este un punct de maxim strict pentru $f(x)$.

Analogic se examinează şi celălalt caz.

□

Exemplu. Aflaţi extremele funcţiei $f(x) = (1 - x^3)^2$.

Funcţia dată este definită pe $\mathbb{R}$. Aflăm derivata

$$f'(x) = 2(1 - x^3) \cdot (-3x^2) = -6x^2(1 - x^3).$$

Deci $D_{f'} = \mathbb{R}$. Rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0$ şi aflăm punctele staţionare $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

La trecerea prin punctul x_1 derivata f' nu-şi schimbă semnul, deci $x_1 = 0$ nu este punct de extrem pentru f.

La trecerea prin punctul x_2 derivata f' îşi schimbă semnul din minus în plus, deci $x_2 = 1$ este punct de minim pentru f şi $f_{\min} = f(1) = 0$.

5.4.4 Condiţiile suficiente de existenţă a extremului local al unei funcţii exprimate prin derivate de ordin superior

Teorema 5.12. *Fie că funcţia $f(x)$ este de clasă $\mathcal{C}^n$ într-o vecinătate a punctului x_0. Fie că*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad iar \quad f^{(n)} \neq 0,$$

atunci, dacă:

i) n este număr par, atunci x_0 este punct de extrem pentru funcţia $f(x)$ şi anume:

– punct de maxim, dacă $f^{(n)}(x_0) < 0$,

– punct de minim, dacă $f^{(n)}(x_0) > 0$,

ii) n este număr impar, atunci x_0 nu este punct de extrem pentru funcţia $f(x)$.

Demonstraţie. Să dezvoltăm funcţia $f(x)$ după formula lui Taylor în punctul x_0,

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,$$

unde ξ este un punct situat între x şi x_0.

Ţinând cont de ipoteza teoremei, avem

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Deoarece funcţia $f^{(n)}(x)$ este continuă în punctul x_0, există o vecinătate $U(x_0)$ a acestui punct în care derivata $f^{(n)}(x)$ păstrează semnul constant, care coincide cu semnul valorii $f^{(n)}(x_0)$. Dacă vom considera $x \in U(x_0)$, atunci semnul valorii $f^{(n)}(\xi)$ coincide cu semnul lui $f^{(n)}(x_0)$.

Fie n este un număr par. Atunci pentru toţi $x \in U(x_0)\setminus\{x_0\}$, avem $(x-x_0)^n > 0$. Prin urmare diferencţa $f(x) - f(x_0)$ păstrează semnul constant în această vecinătate găurită şi deci x_0 este un punct de extrem pentru funcţia $f(x)$. În plus,

– dacă $f^{(n)}(x_0) > 0$, atunci $f^{(n)}(\xi) > 0$, şi deci $f(x) - f(x_0) > 0$, ceea ce înseamnă că x_0 este un punct de minim pentru $f(x)$;

– dacă $f^{(n)}(x_0) < 0$, atunci $f^{(n)}(\xi) < 0$, şi deci $f(x) - f(x_0) < 0$, ceea ce înseamnă că x_0 este un punct de maxim pentru $f(x)$;

Fie n este un număr impar. Atunci în vecinătatea $U(x_0) \setminus \{x_0\}$, expresia $(x - x_0)^n$ nu păstrează semnul constant (pentru $x < x_0$, avem $(x - x_0)^n < 0$, iar pentru $x > x_0$, avem $(x - x_0)^n > 0$), de aceea nici diferenţa $f(x) - f(x_0)$ nu păstrează semnul constant pe această mulţime. Dar atunci, x_0 nu este punct de extrem pentru funcţia $f(x)$.

□

Consecinţă. În particular, dacă o funcţie $f(x)$ este continuu-diferenţiabilă de două ori într-o vecinătate a punctului x_0 şi dacă

$$f'(x_0) = 0, \quad \text{iar} \quad f''(x_0) \neq 0,$$

atunci x_0 este punct de maxim, dacă $f''(x_0) < 0$ şi este punct de minim, dacă $f''(x_0) > 0$.

Exemplu. Aflaţi extremele funcţiei $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

Avem $D_f = \mathbb{R}$. Aflăm

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3).$$

Punctele staţionare sunt $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Aflăm derivata de ordinul doi $f''(x) = 6x - 6$. Deoarece

$$f''(-1) = -12 < 0, \quad \text{avem} \quad x_1 = -1 \quad \text{este punct de maxim,} \quad f_{\max} = f(-1) = 7;$$

$$f''(3) = 12 > 0, \quad \text{avem} \quad x_2 = 3 \quad \text{este punct de minim,} \quad f_{\min} = f(3) = -25.$$

5.4.5 Aflarea valorii celei mai mari şi valorii celei mai mici ale unei funcţii pe un segment

În practică adeseori se întâlnesc probleme în care se cere de aflat valoarea cea mai mare sau valoarea cea mai mică a unei funcţii $f(x)$ pe un segment închis $[a, b]$. Pentru aceasta, în cazul când funcţia f este diferenţiabilă, vom aplica următorul algoritm:

1) Calculăm derivata $f'(x)$ a funcţiei date.

2) Aflăm punctele staţionare, rezolvând ecuaţia $f'(x) = 0$.

3) Calculăm valorile funcţiei f în punctele staţionare care se conţin în acest segment.

4) Calculăm valorile funcţiei f la capetele segmentului.

5) Comparăm valorile găsite şi aflăm cea mai mare şi cea mai mică valoare a funcţiei pe segmentul dat.

Exemplu. Să se afle un număr, care fiind adunat cu pătratul său dă în rezultat suma minimă.

Soluţie. Fie, x numărul căutat. Atunci suma dintre acest număr şi pătratul lui este

$$S(x) = x + x^2.$$

Aflăm derivata $S'(x) = 1 + 2x$ şi din ecuaţia $S'(x) = 0$ găsim punctul staţionar $x = -\frac{1}{2}$. Deoarece $S''(x) = 2 > 0$ deducem că $x = -\frac{1}{2}$ este un punct de minim pentru funcţia $S(x)$. Deci, numărul căutat este $x = -\frac{1}{2}$.

5.5 Rolul derivatei de ordinul II în studiul funcţiilor de o variabilă reală

5.5.1 Convexitatea şi concavitatea graficului unei funcţii. Puncte de inflexiune

Fie că funcţia f este definită pe intervalul (a, b) şi fie $a < x_1 < x_2 < b$. Prin punctele $A(x_1, f(x_1))$ şi $B(x_2, f(x_2))$ de pe graficul funcţiei f ducem o dreaptă l. Ecuaţia acestei drepte este

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)},$$

sau de aici
$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$
Notăm cu $l(x)$ expresia din membrul drept, atunci ecuaţia acestei drepte se înscrie în forma $y = l(x)$. Evident că $l(x_1) = f(x_1)$ şi $l(x_2) = f(x_2)$.

Definiţia 5.6. Funcţia f se numeşte *convexă* (corespunzător *concavă*) pe intervalul (a, b), dacă oricare ar fi punctele x_1 şi x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, pentru orice punct x_0 de pe intervalul (x_1, x_2) are loc inegalitatea
$$l(x_0) \leq f(x_0), \tag{5.12}$$
(corespunzător
$$l(x_0) \geq f(x_0)). \tag{5.13}$$

Geometric aceasta înseamnă că orice punct de pe coarda AB se află nu mai sus (respectiv nu mai jos) decât punctul de pe graficul funcţiei f corespunzător aceleaşi valori a argumentului.

Definiţia 5.7. Dacă în loc de inegalităţile (5.12) şi (5.13) au loc inegalităţile stricte
$$l(x_0) < f(x_0),$$
corespunzător
$$l(x_0) > f(x_0)$$
pentru orice x_0, x_1 şi x_2 astfel încât $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$, atunci funcţia f se numeşte *strict convexă* (corespunzător *strict concavă*) pe intervalul (a, b)..

Definiţia 5.8. Orice interval pe care o funcţie este (strict) convexă, corespunzător (strict) concavă, se numeşte *interval de convexitate (strictă)*, corespunzător *interval de concavitate (strictă)* pentru această funcţie.

Definiţia 5.9. Fie funcţia f definită într-o vecinătate a punctului x_0 şi continuă în acest punct. Punctul x_0 se numeşte *punct de inflexiune* pentru funcţia f, dacă ea este în acelaşi timp capătul intervalului de convexitate strictă şi capătul intervalului de concavitate strictă.

În acest caz, punctul $(x_0, f(x_0))$ se numeşte *punct de inflexiune pentru graficul funcţiei.*

5.5.2 Condiţia suficientă de convexitate (concavitate) strictă a unei funcţii

Teorema 5.13. *Fie f o funcţie definită şi diferenţiabilă de 2 ori pe intervalul (a, b). Dacă $f'' < 0$ pe (a, b), atunci funcţia f este strict convexă, iar dacă $f''(x) > 0$ pe (a, b), atunci funcţia f este strict concavă pe acest interval.*

Demonstraţie. Fie $a < x_1 < x < x_2 < b$. Atunci

$$l(x) - f(x) = \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

La diferenţa $f(x_2) - f(x)$ aplicăm teorema lui Lagrange, conform căreea există un punct η situat între x şi x_2 astfel încât

$$f(x_2) - f(x) = f'(\eta)(x_2 - x).$$

La diferenţa $f(x) - f(x_1)$ de asemenea aplicăm teorema lui Lagrange, conform căreea există un punct ξ între x_1 şi x astfel încât

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x - x_1).$$

Deci

$$l(x)-f(x) = \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1},$$

unde $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$.

La diferenţa $f'(\eta) - f'(\xi)$ de asemenea aplicăm teorema lui Lagrange, conform căreea există un punct $\zeta \in (\xi, \eta)$ astfel încât

$$l(x) - f(x) = \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1}.$$

De aici observăm că dacă $f'' < 0$ pe (a, b), atunci în particular $f''(\zeta) < 0$ şi de aceea $l(x) < f(x)$. Prin urmare, funcţia f este strict convexă.

Dacă însă, $f'' > 0$ pe (a, b), atunci $l(x) > f(x)$, iar funcţia $f(x)$ este strict concavă pe intervalul dat.

□

Exemplu. Fie $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$. Deoarece $f''(x) = 6x$, deducem că pentru $x > 0$, avem $f'' > 0$, iar pentru $x < 0$, avem $f'' < 0$. Deci pe intervalul $(-\infty, 0)$ funcţia dată este strict convexă, iar pe intervalul $(0, +\infty)$ ea este strict concavă. Punctul $x = 0$ este în acelaşi timp capătul intervalului de convexitate şi al intervalului de concavitate, deci acesta este un punct de inflexiune.

Remarcă. Condiţia de păstrare a semnului derivatei de ordinul 2 fiind suficientă pentru convexitatea (sau concavitatea) strictă a funcţiei f nu este şi suficientă. Aşa, de exemplu, funcţia $f(x) = x^4$ este strict concavă pe toată axa, însă derivata ei de ordinul doi $f''(x) = 12x^2$ se anulează în punctul $x = 0$.

5.5.3 Condiţia necesară de existenţă a punctului de inflexiune

Teorema 5.14 (Condiţia necesară de existenţă apunctului de inflexiune). *Fie f o funcţie definită şi continuu diferenţiavbilă de două ori pe intervalul (a, b). Dacă punctul $x_0 \in (a, b)$ este punct de inflexiune pentru f, atunci $f''(x_0) = 0$.*

Demonstraţie. Dacă ar fi fost $f''(x_0) < 0$, atunci din continuitatea derivatei de ordinul doi, rezultă că se va putea găsi o vecinătate a punctului x_0 în care $f''(x) < 0$ şi conform Teoremei 5.13 funcţia f ar fi fost strict convexă pe acest interval care conţine în interiorul său punctul x_0, ceea ce contrazice faptul că x_0 este un punct de inflexiune pentru f.

□

Remarcă. Punctele de inflexiune ale unei funcţii continuu diferenţiabile de două ori cu excepţia posibilă a unui număr finit de puncte, trebuie căutate printre punctele în care derivata de ordinul doi este egală cu zero sau nu există.

5.5.4 Condiţiile suficiente de existenţă a punctului de inflexiune

Teorema 5.15. *Fie f o funcţie continuă pe intervalul (a, b) şi derivabilă de două ori pe acest interval, cu excepţia posibilă a punctului $x_0 \in (a, b)$. Dacă la trecerea argumentului prin punctul x_0 derivata de ordinul doi îşi schimbă semnul, atunci x_0 este un punct de inflexiune pentru f.*

Exemplu. Fie $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$. Deoarece $f''(x) = 6x$ şi $f'' < 0$, dacă $x < 0$ şi $f'' > 0$, dacă $x > 0$ deducem că $x_0 = 0$ este punct de inflexiune.

Teorema 5.16. *Dacă o funcţie f este diferenţiabilă de două ori pe intervalul (a, b) şi derivata de ordinul doi păstrează semnul constant pe (a, b) (prin urmare, intervalul (a, b) este interval de convexitate sau concavitate strictă pentru funcţia f), atunci oricare ar fi punctul $x_0 \in (a, b)$ toate punctele graficului funcţiei f pe acest interval se află ori de asupra ori sub tangenta dusă la grafic în punctul $(x_0, f(x_0))$ cu excepţia acestui punct care se află pe graficul funcţiei.*

Teorema 5.17. *Fie $f''(x_0) = 0$ şi $f'''(x_0) \neq 0$, atunci x_0 este un punct de inflexiune pentru f. Dacă $y = L(x)$ este ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $(x_0, f(x_0))$, atunci la trecerea argumentului prin punctul x_0 diferenţa $f(x) - L(x)$ îşi schimbă semnul.*

5.5.5 Asimptotele graficului unei funcţii

Definiţia 5.10. Fie f o funcţie definită pentru $x > a$ (sau pentru $x < a$). Vom numi *asimptotă a funcţiei f* o aşa dreaptă pentru care distanţa de la un punct de pe graficul funcţiei f până la această dreaptă tinde la zero, atunci când punctul se îndepărtează nelimitat de-a lungul curbei $y = f(x)$ de la originea coordonatelor.

Existenţa asimptotei unei funcţii înseamnă că atunci când argumentul $x \to +\infty$ (sau $x \to -\infty$) funcţia se comportă aproape la fel ca o funcţie liniară, adică se deosebeşte de o funcţie liniară infinit de puţin.

Cu alte cuvinte, dreapta $y = kx + b$ este *asimptotă oblică* pentru funcţia $f(x)$ când $x \to \pm\infty$ dacă funcţia $f(x)$ poate fi prezentată în forma

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

unde $\lim_{x\to\pm\infty} \alpha(x) = 0$.

De aici aflăm
$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x},$$
deci
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} k + \lim_{x\to\infty} \frac{b}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{x} = k.$$
Ac sadar,
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},$$
iar
$$b = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx\right).$$

Dacă $k = 0$, atunci asimptota se numeşte *orizontală.*

Definiţia 5.11. Dreapta $x = x_0$ se numeşte *asimptotă verticală* a funcţiei $f(x)$ dacă
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

Exemplu. Aflaţi asimptotele funcţiei $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$.

Deoarece
$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1} = \infty$$
deducem că $x = -1$ este asimptotă verticală pentru funcţia dată.

Să determinăm dacă funcţia are asimptotă oblică sau orizontală. Pentru aceasta calculăm limitele
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x - 2}{x(x + 1)} = 1, \quad b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1} - x\right) = -4.$$
Deci $y = x - 4$ este asimptotă oblică a funcţiei date.

5.5.6 Planul studierii funcţiilor. Construcţia graficului funcţiei

1. Aflaţi domeniul de definiţie al funcţiei.

2. Studiaţi funcţia la continuitate.

3. Studiaţi funcţia la paritate/imparitate şi periodicitate.

4. Dacă este posibil, aflaţi zerourile funcţiei.

5. Aflaţi asimptotele graficului funcţiei şi limitele funcţiei la capetele domeniului de definiţie.

6. Aflaţi derivata funcţiei şi domeniul de definiţie al derivatei.

7. Aflaţi punctele critice în raport cu derivata de ordinul I.

8. Aflaţi intervalele de monotonie ale funcţiei.
9. Aflaţi extremele funcţiei.
10. Aflaţi derivata de ordinul doi şi domeniul ei de definiţie.
11. Aflaţi punctele critice în raport cu derivata de ordinul doi.
12. Aflaţi intervalele de convexitate şi concavitate.
13. Aflaţi punctele de inflexiune.
14. Sistematizaţi datele în tabelul de variaţie al funcţiei.
15. Schiţaţi graficul funcţiei.

Exerciţii. Studiaţi şi schiţaţi graficele funcţiilor date:

1. $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$;
2. $f(x) = -x^3 + 4x - 3$;
3. $f(x) = (x-1)^3(x+1)^2$;
4. $f(x) = \dfrac{4 + x - 2x^2}{(x-2)^2}$.

Bibliografie

1. Bivol, L., Bulat, M., *Lecţii la analiza matematică*, v. 1, Chişină u: EVRICA, 2002, 238 pag.

2. Precupanu, A., *Bazele analizei matematice*, Ed. Universităţii „Al. I. Cuza”, Iaşi, 1993, 475 pag.

3. Зорич, В. А., *Математический анализ*, ч. 1, Москва: ФАЗИС, 1997, 554 стр.

4. Ильин, В.А., Позняк, Э.Г. Основы математического анализа; т. 1, Москва: Наука, 1980.

5. Кудрявцев, Л. Д., *Математический анализ*, т. 1, Москва: Высшая школа, 1970, 588 стр.

6. Фихтенгольц, Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 1, Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003, 680 стр.

7. Штернтал, А. Ф., *Ынтродучере ын студиул анализей математиче*, Кишинэу: Лумина, 1966.