CZU 512.1(072.3)

TEHNICI DE REZOLVARE A ECUAȚIILOR DIOFANTICE ÎN CLASA A 7-A

Boris URSU, *student, Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului, Universitatea de Stat „Alecu Russo" din Bălți*
Conducător științific: **Tatiana ROTARI,** *asist. univ.*

Abstract: *Analyzing the types of Diophantine equations proposed in the mathematics textbook, the collections of exercises and problems, as well as the tests proposed to 7th grade students in various competitions, the following techniques for solving Diophantine equations can be highlighted: the use of the properties of prime numbers, the method of decomposition into factors, perfect squares highlighting method.*

Keywords: *diofantine equation, prime number, integer number, factorization, proportion.*

În matematică, ecuațiile diofantice reprezintă ecuații polinomiale sau transcendente cu coeficienți și soluții întregi. Aceste ecuații sunt numite după Diophantus din Alexandria, un matematician grec, care a fost primul savant ce a studiat acest tip de ecuații. Este de remarcat faptul că, nu orice ecuației diofantică poate fi rezolvată, ci există unele clase de ecuații algoritmul de rezolvare al cărora este bine cunoscut. Dintre aceste clase de ecuații diofantice pot fi evidențiate: ecuații diofantice liniare cu n necunoscute, ecuații polinomiale de gradul n de o variabilă. Celelalte tipuri de ecuații diofantice nu admit un algoritm bine determinat de rezolvare [3].

Rezolvarea ecuațiilor diofantice poate fi o sarcină dificilă, care necesită uneori metode ingenioase și complexe. Ecuațiile diofantice se întâlnesc deseori la majoritatea concursurilor școlare, municipale, raionale, republicane. De exemplu, la Olimpiada Republicană de matematică din 2019, elevilor clasei a 7-a li s-a propus spre rezolvare următorul item:

Exemplul 1. Fie expresia $E(a,\ b)\ = \frac{3}{a+2} + \frac{7}{2b+3}$. Determinaţi toate numerele naturale nenule a şi b, pentru care valoarea expresiei $E(a,\ b)$ este un număr natural, $a, b \in \mathbb{N}$.

Rezolvare. Se evaluează mai întâi expresia $E(a,b)$. Deoarece $a \in \mathbb{N}^*$, reiese că $a \geq 1$. Adunând la ambele părți 2, se obține $a + 2 \geq 3$. În baza proprietăților inegalităților, se obține

$$\frac{3}{a+2} \leq \frac{3}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{a+2} \leq 1.$$

Deoarece $b \in \mathbb{N}^*$, reiese că $b \geq 1$, adică $2b + 3 \geq 5$. Atunci

$$\frac{7}{2b+3} \leq \frac{7}{5}.$$

Adunând cele două inegalități parte cu parte, se obține că

$$E(a,b) \leq 1 + \frac{7}{5} = 2\frac{2}{5}.$$

Deoarece $E(a,b) \in \mathbb{N}$, reiese că $E(a,b) \in \{1;2\}$. Pentru a determina valorile a *și* b este suficient de studiat fiecare dintre cele două cazuri.

Cazul 1. Fie $E(a,b) = 1$. Atunci

$$\frac{3}{a+2} + \frac{7}{2b+3} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{a+2} = 1 - \frac{7}{2b+3} = \frac{2b+3-7}{2b+3} = \frac{2b-4}{2b+3}$$

$$\frac{a+2}{3} = \frac{2b+3}{2b-4} \Leftrightarrow a+2 = \frac{3(2b+3)}{2(b-2)} \Leftrightarrow a = 1 + \frac{21}{2(b-2)}.$$

Pentru că $a \in \mathbb{N}^*$este necesar ca $\frac{21}{2(b-2)} \in \mathbb{N}$, adică $21 \vdots 2(b-2)$. Deoarece 21 este impar, reiese că are doar divizori impari, însă, $2(b-2)$ este par, adică $2(b-2)$ nu poate fi divizor al lui 21, ceea ce semnifică că $E(a,b) \neq 1$.

Cazul 2. Fie $E(a,b) = 2$.

$$\frac{3}{a+2} + \frac{7}{2b+3} = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{a+2} = \frac{4b-1}{2b+3} \Leftrightarrow a = \frac{11-2b}{4b-1}.$$

Deoarece $b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 4b - 1 \geq 3$. Numărul $a \in \mathbb{N}^*$ numitorul este pozitiv, reiese că numărătorul la fel este pozitiv, adică $11 - 2b \geq 0 \Rightarrow 2b \leq 11 \Rightarrow b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Pentru fiecare dintre valorile lui b determinate, se calculează $a \in \mathbb{N}^*$.

$$b = 1 \Rightarrow a = \frac{11-2}{3} = \frac{9}{3} = 3 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (a,b) = (3;1),$$

$$b = 2 \Rightarrow a = \frac{11-4}{8-1} = \frac{7}{7} = 1 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (a,b) = (1;2),$$

$$b = 3 \Rightarrow a = \frac{11-6}{12-1} = \frac{5}{11} \notin \mathbb{N}^*,$$

$$b = 4 \Rightarrow a = \frac{11-8}{16-1} = \frac{3}{15} \notin \mathbb{N}^*,$$

$$b = 5 \Rightarrow a = \frac{11-10}{20-1} = \frac{1}{19} \notin \mathbb{N}^*,$$

Răspuns. $(a,b) \in \{(3;1);(1;2)\}$.

La Olimpiada Republicană din 2017, elevilor clasei a 7-a li s-a propus spre rezolvare următoarea problemă, nefiind indicat că este necesar de rezolvat ecuația diofantică.

Exemplul 2. Determinați numerele naturale nenule a, b, c, știind că

$$\frac{2016}{a+b} = \frac{2017}{a+c} = \frac{2018}{b+c} \text{ și } 2(b-a)^2 + 4(c-b)^2 + 3(c-a)^2 = 288.$$

Rezolvare. Utilizând proprietățile șirului de rapoarte egale, obținem:

$$\frac{2016}{a+b} = \frac{1}{k} \Rightarrow a + b = 2016k, \qquad (1)$$

$$\frac{2017}{a+c} = \frac{1}{k} \Rightarrow a + c = 2017k, \qquad (2)$$

$$\frac{2018}{b+c} = \frac{1}{k} \Rightarrow b + c = 2018k. \qquad (3)$$

Din (3) scădem (1) și din (2) scădem (1). În rezultat obținem:

$$c - a = 2k \qquad (4)$$

$$c - b = k \qquad (5)$$

Din relația (5) scădem (4) și obținem $-b + a = -k$.

$$b - a = k \qquad (6)$$

Substituim relațiile (4), (5) și (6) în a doua condiție a problemei:

$2k^2 + 4k^2 + 3(2k)^2 = 288 \Rightarrow 2k^2 + 4k^2 + 12k^2 = 288 \Leftrightarrow k^2 = 16 \Leftrightarrow k = 4.$

Substituind $k = 4$ în relațiile (4), (5) și (6), obținem:

$$c - a = 8 \Rightarrow c = 8 + a$$

$$c - b = 4 \Rightarrow c = 4 + b$$

Înlocuim și obținem $a + 8 + a = 2017 \cdot 4 \Rightarrow 2a = 8068 - 8 \Rightarrow 2a = 8060.$

Răspuns. $a = 4030;\ c = 4038;\ b = 4034$

Analizând tipurile de ecuații diofantice propuse în manualul de matematică, culegerile de exerciții și probleme, pot fi evidențiate următoarele tehnici de rezolvare a ecuațiilor diofantice: utilizarea proprietăților numerelor prime, metoda descompunerii în factori.

Utilizarea proprietăților numerelor prime este una dintre cele mai simple și mai frecvent utilizate metode de rezolvare a ecuațiilor diofantice. Această metodă presupune rezolvarea ecuațiilor soluțiile cărora sunt numere naturale prime. Pentru elevii clasei a 7-a, metoda substituției constă în utilizarea proprietăților numerelor prime, a puterilor numerelor naturale. Deseori rezolvarea acestor ecuații diofantice implică și utilizarea unor criterii de divizibilitate. Pentru rezolvarea acestor ecuații diofantice este necesar de efectuat o analiză detaliată a ecuației și de selectat acele valori ale necunoscutelor ce pot fi soluții ale ecuației respective. Prin substituții succesive se determină valorile întregi ale celorlalte necunoscute.

Exemplul 3. Să se determine numerele naturale prime $x, y, z,$ știind că

$$(x + 3y - 4z)(8x - 36) = (2x - 3y + 4z)(36 - 5x)\ [1, p. 114].$$

Rezolvare. Pentru a rezolva această ecuație este suficient de a privi această relație drept legea fundamentală a proporției. Construind proporția ce satisface această relație, se obține:

$$\frac{x + 3y - 4z}{2x - 3y + 4z} = \frac{36 - 5x}{8x - 36}.$$

Utilizând rapoartele derivate, la numitorii rapoartelor adunăm numărătorii și se obține:

$$\frac{x + 3y - 4z}{3x} = \frac{36 - 5x}{3x}.$$

Deoarece numitorii sunt egali, reiese că numărătorii la fel sunt egali. În rezultat se obține

$$x + 3y - 4z = 36 - 5x \Leftrightarrow 6x + 3y - 4z = 36.$$

Deoarece x, y și z sunt numere prime, iar $6x, 4z$ și 36 sunt numere pare, reiese că $3y$ la fel este par, adică y este număr par. Însă, unicul număr prim par este 2, deci $y = 2$. Substituind în ultima ecuație se obține:

$$6x + 6 - 4z = 36 \Leftrightarrow 6x - 4z = 30 \Leftrightarrow 3x - 2z = 15.$$

Deoarece $3x$ și 15 se divid cu 3, reiese că $2z$ la fel se divide cu 3. Deoarece unicul număr divizibil cu 3 ce este prim este 3, reiese că $z = 3$. Substituind în ultima relație se obține:

$$3x - 6 = 15 \Leftrightarrow 3x = 21 \Leftrightarrow x = 7.$$

Răspuns. $x = 7, y = 2, z = 3$.

Metoda descompunerii în factori reprezintă una dintre metodele de bază de rezolvare a ecuațiilor diofantice de grad superior cu două sau mai multe variabile. Metoda constă în gruparea termenilor ecuației pentru a aduce ecuația la un produs de două sau mai multe expresii ce este egal cu un număr. Apoi numărul întreg se descompune în produs de factori, ținându-se cont de ordinea factorilor și regula semnelor la înmulțirea numerelor întregi.

Exemplul 4. Aflați perechile de numere întregi (x, y) astfel încât

$$xy + 5x + 4y + 19 = 0 \text{ [1, p. 97]}.$$

Rezolvare. Pentru a rezolva acest tip de ecuații prin metoda descompunerii în factori, se transcrie ecuația în felul următor:

$$xy + 5x + 4y + 20 - 20 + 19 = 0 \Leftrightarrow x(y + 5) + 4(y + 5) - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + 4)(y + 5) = 1.$$

Deoarece x și y sunt numere întregi, reiese că expresiile $x + 4$ și $y + 5$ sunt la fel numere întregi, iar produsul acestora este la fel număr întreg. Astfel, soluțiile ecuației sunt generate de posibilitățile de reprezentare a termenului liber în produs de două numere întregi, adică $1 = 1 \cdot 1 = -1 \cdot (-1)$. În așa mod, pentru rezolvarea ecuației este necesar de rezolvat următoarele sisteme de ecuații liniare:

$$\begin{cases} x + 4 = 1, \\ y + 5 = 1 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x + 4 = -1, \\ y + 5 = -1. \end{cases}$$

Rezolvând aceste sisteme de ecuații, obținem două soluții ale ecuației.

Răspuns. $(x, y) \in \{(-3; -4), (-5; -6)\}$.

Tehnica de rezolvare a acestei ecuații diofantice poate fi generalizată pentru cazul ecuației diofantice de tipul:

$$xy + ax + by + c = 0, a, b, c, x, y \in \mathbb{Z}.$$

Pentru a rezolva ecuația este suficient de transcris ecuația astfel:

$$xy + ax + by + ab + c - ab = 0 \Leftrightarrow (x + b)(y + a) = ab - c.$$

Deoarece $a, b, c \in \mathbb{Z}$, reiese că numărul $ab - c$ la număr întreg. Se descompune numărul $ab - c$ în produs de doi factori. Este important ca elevul clasei a 7-a să conștientizeze ca combinația $k_1 \cdot k_2$ generează patru variante de rezolvare. Rezolvarea ecuației se reduce la rezolvarea sistemelor de ecuații:

$$\begin{cases} x + b = k_1, \\ y + a = k_2, \end{cases}$$

unde $k_1 \cdot k_2 = ab - c$.

Bibliografie:

1. IAVORSCHI, V. Matematica: Culegere de exerciții și probleme, clasa a 7-a. Chișinău, Ed. Tipografia din Orhei, 2018. -236 p. ISBN 978-9975-73-218-5
2. IAVORSCHI, V. Matematica: Culegere de exerciții și probleme pentru concursuri, cl. 5-a-9-a. Orhei, Ed. Tipografia din Orhei, 2014. – 160 p. ISBN 978-9975-4398-1-7
3. POPOVICI, T. *Asupra unor ecuații diofantice.* Tradiţie şi inovare în cercetarea ştiinţifică, Ediţia a 4-a: Materialele Colloquia Professorum din 18 oct. 2013. – Bălţi. – 2014. p. 259-264.