CZU 512.642

ÎNVELIȘUL LINIAR AL UNUI SISTEM DE VECTORI

Boris URSU, *student, Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului, Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălți*
Conducător științific: **Tatiana ROTARI,** *asist. univ.*

Abstract: *In this article discusses the concept of linear wrapper, which is a fundamental concept in higher algebra and related to the theory of vector spaces. It defines a linear vector space and introduces the concepts of linear combinations and linear independence of a set of vectors. It then provides examples to demonstrate the application of these concepts in determining the linear dependence of a set of vectors.*
Keywords: *linear space, linear combinations, linear envelope, linear dependence and independence, fundamental system of solutions.*

Noțiuni generale. Conceptul de înveliș liniar reprezintă unul dintre conceptele de bază ale algebrei superioare și ține de teoria spațiilor vectoriale (liniar). În lucrarea citată [2], conceptul de spațiu vectorial este definit astfel:

Definiție 1. Fie P(+,·) un câmp arbitrar cu unitate, elementele căruia ulterior le vom numi scalari, și V o mulțime nevidă înzestrată cu o operație algebrică „+”, numită adunare, elementele căreia le vom numi vectori. Vom spune că mulțimea V este un spațiu vectorial (liniar) la stânga peste câmpul P, dacă:

1. Mulțimea V se organizează ca grup comutativ (abelian) față de adunare, adică:
   a) $x + y = y + x, \forall x, y \in V$;
   b) $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in V$;
   c) $\exists \theta \in V$ astfel încât $\forall x \in V, x + \theta = \theta + x = x$;
   d) $\forall x \in V, \exists(-x) \in V$ astfel încât $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
2. Este definită o lege de compoziție externă $P \times V \to V$, notată $(\alpha; x) \to \alpha x$, astfel încât $\forall x, y \in V$ $și$ $\forall \alpha, \beta \in P$:
   a) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
   b) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$;
   c) $(\alpha \cdot \beta)x = \alpha(\beta x)$;
   d) $1x = x$.

Definiție 2. Vom spune că vectorul $b \in V$ este o combinație liniară a vectorilor $a_1, a_2, \dots, a_n$ sau b se exprimă liniar prin vectorii sistemului $a_1, a_2, \dots, a_n$, dacă există scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ astfel încât $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$ [1].

Definiție 3. Fie V un spațiu liniar peste câmpul P și $a_1, a_2, \dots, a_s \in V$. Sistemul de vectori $a_1, a_2, \dots, a_s$ se numește liniar dependent, dacă există scalarii $a_1, a_2, \dots, a_s \in P$ nu toți nuli, astfel încât $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s = 0$. În caz contrar, sistemul de vectori se numește liniar independent [1].

Exemplul 1. Studiați dependența sistemului de vectori

$$a_1 = (2,3,4); a_2 = (-1,1,2); a_3 = (4,1,2).$$

Rezolvare. Fie $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,3}$ cu $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$. Substituind în combinația liniară vectorii și efectuând operațiile cu aceștia, ea se reduce la rezolvarea sistemului omogen de ecuații liniare:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Pentru a stabili dacă sistemul de vectori este liniar dependent sau independent, este suficient de determinat rangul matricei sistemului. Matricea asociată sistemului dat este:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Efectuând transformări elementare asupra liniilor matricei, se aduce matricea A la forma eșalon. Din linia a 2-a se scade linia a întâia înmulțită cu $\frac{3}{2}$, din linia a 3-a se scade linia întâia înmulțită cu 2 și linia a 2-a înmulțită cu $\frac{8}{5}$, în rezultat se obține:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Deoarece rangul matricei A este egal cu numărul vectorilor din sistem, $rang\ L = rang\ A = 3$, rezultă că sistemul L este linear independent.

Răspuns. Sistemul de vectori este linear independent.

Exemplul 2. Studiați dependența sistemului de vectori

$$a_1 = (1,1,2,3); a_2 = (2,1,1,0); a_3 = (4,3,5,6).$$

Rezolvare. Fie $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,3}$ cu $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$. Sistemul omogen de ecuații liniare ce corespunde sistemului de vectori este:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 6\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Efectuând transformări elementare, adică se aduce matricea sistemului la forma eșalon. În rezultat se obține:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deci, rangul matricei sistemului este 2 și este mai mic decât numărul de vectori, ceea ce semnifică că sistemul de vectori este liniar dependent.

Definiția 4. Fie V un spațiu vectorial peste câmpul P. Submulțimea nevidă $L \subseteq V$ se numește subspațiu în V, dacă în raport cu aceleași operații care sunt definite în V însăți L este spațiu vectorial peste P [1].

În aceeași lucrare sunt indicate condițiile pentru ca o submulțime să fie subspațiu vectorial și anume: Submulțimea nevidă $L \subseteq V$ este subspațiu în V, dacă și numai dacă ea verifică condițiile:

$$\forall x, y \in L \Rightarrow x + y \in L,$$
$$\forall x \in L, \alpha \in P \Rightarrow \alpha x \in L.$$

Definiția 5. Fie V un spațiu vectorial și $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$. Mulțimea tuturor combinațiilor liniare posibile ale acestor vectori se numește învelișul liniar al acestora și se notează cu:

$$Lin(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n,\ \alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}\}. \quad [1].$$

Învelișul liniar al unui sistem de vectori reprezintă cel mai mic subspațiu vectorial ce conține acești vectori, iar cel mai mare subspațiu este V. Dacă sistemul de vectori $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este bază a spațiului vectorial V, atunci $Lin(a_1, a_2, \ldots, a_n) = V$.

Exemplul 2. Determinați cel mai mic subspațiu vectorial al spațiului $\mathbb{R}^3$ ce conține vectorii

$$a_1 = (3,1,0), a_2 = (0,2,1), a_3 = (9,5,1).$$

Rezolvare. Deoarece din $\mathbb{R}^3 = 3$ și sistemul de vectori conține trei vectori, obținem că dacă vectorii sunt liniari independenți, atunci $Lin(a_1, a_2, a_3) = \mathbb{R}^3$. Astfel, vom studia mai întâi independența liniară a vectorilor. În acest scop, vom calcula determinantul ce are în calitate de coloane coordonatele vectorilor. Dacă determinantul este 0, atunci vectorii sunt liniari dependenți, în caz contrar sunt liniari independenți.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 9 - 15 = 0.$$

Deci, sistemul de vectori este liniar dependent, iar învelișul liniar nu coincide cu spațiul $\mathbb{R}^3$. Determinăm combinația liniară a vectorilor a_1, a_2, a_3.

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \alpha_1(3,1,0) + \alpha_2(0,2,1) + \alpha_3(9,5,1) =$$
$$= (3\alpha_1 + 9\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3)$$
$$Lin(a_1, a_2, a_3) = \{(3\alpha_1 + 9\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3) | \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Orice înveliș liniar este caracterizat de un sistem de ecuații liniare omogen compatibil nedeterminat.

Determinarea învelișului liniar caracterizat de un sistem de ecuații liniare omogene

Definiție 6. Sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad a_{ij}, b_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n};$$

se numește omogen dacă termenii liberi ai tuturor ecuațiilor sunt 0 [3].

Forma generală a unui sistem de m ecuații liniare omogene cu n necunoscute este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Observație. Dacă numărul de ecuații este mai mic decât numărul de necunoscute, atunci sistemul este compatibil nedeterminat.

Pentru a determina învelișul liniar caracterizat de un sistem de ecuații liniare omogene, procedează astfel:

1) se rezolvă sistemul de ecuații și se determină soluția generală a sistemului prin metoda Gauss sau Gauss-Jordan;
2) se determină sistemul fundamental de soluții, substituind în locul variabilelor din soluția generală coordonatele vectorilor unitari;
3) se construiește învelișul liniar pentru sistemul fundamental de soluții.

Exemplu. Determinați învelișul liniar caracterizat de sistemul omogen de ecuații liniare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Rezolvare. Utilizând metoda Gauss-Jordan, se rezolvă sistemul de ecuații pentru a determina soluția generală a sistemului omogen de ecuații liniare.

$$A=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 10 & 1 & -1 & 0\\ 5 & \boxed{-1} & 8 & -2 & 2 & 0\\ 3 & -3 & -12 & -4 & 4 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 0 & 18 & \boxed{-1} & 1 & 0\\ -5 & 1 & -8 & 2 & -2 & 0\\ -12 & 0 & -36 & 2 & -2 & 0\end{array}\right)\sim$$
$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} -6 & 0 & -18 & 1 & -1 & 0\\ 7 & 1 & 28 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Din matricea obținută se determină sistemul de ecuații omogene, eliminând ultima linie

$$\begin{cases}-6x_1-18x_3+x_4-x_5=0,\\ 7x_1+x_2+28x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_4=6x_1+18x_3+x_5,\\ x_2=-7x_1-28x_3.\end{cases}$$

Considerăm în calitate de bază vectorii x_1, x_3, x_5. În baza acestora, se determină sistemul fundamental de soluții:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	-7	0	6	0
0	-28	1	18	0
0	0	0	1	1

Sistemul fundamental de soluții al sistemului omogen de ecuații liniare este

$$f_1=(1,-7,0,6,0), f_2=(0,-28,1,18,0), f_3=(0,0,0,1,1).$$

Construim învelișul liniar caracterizat de vectorii f_1, f_2, f_3:

$$Lin\,(f_1,f_2,f_3)=\{\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}\}.$$

Determinăm combinația liniară a vectorilor f_1, f_2, f_3.

$$\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3=\alpha_1(1,-7,0,6,0)+\alpha_2(0,-28,1,18,0)+\alpha_3(0,0,0,1,1)$$
$$=(\alpha_1,-7\alpha_1-28\alpha_2,\alpha_2,6\alpha_1+18\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3)$$

Răspuns. Învelișul liniar caracterizat de sistemul omogen de ecuații liniare este

$$Lin\,(f_1,f_2,f_3)=\{(\alpha_1,-7\alpha_1-28\alpha_2,\alpha_2,6\alpha_1+18\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3)|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}\}$$

Determinarea sistemului minimal de ecuații liniare omogene caracterizat de un înveliș liniar

Corespondența dintre sistemele de ecuații liniare omogene și învelișul liniar al unui sistem de vectori reprezintă o corespondență biunivocă, adică cunoscând învelișul liniar se poate determina un sistem de ecuații liniare omogene ce caracterizează acest înveliș. Acest sistem nu este unic, însă este minimal, iar celelalte ecuații ale sistemului reprezintă combinații liniare ale ecuațiilor determinate.

Pentru determinarea sistemului minimal de ecuații liniare omogene caracterizat de un înveliș liniar, se procedează astfel:

1) se construiește matricea M ce are în calitate de coloane coordonatele vectorilor;
2) se determină din Lin, calculând rangul matricei M;
3) se determină o bază a învelișului liniar;
4) se determină sistemul fundamental de soluții;

5) se determină sistemul de ecuații liniare omogene. Fiecare vector al sistemului fundamental de soluții conține coeficienții unei ecuații în sistemul de ecuații liniare omogene.

Observație. Dacă $dim\, V = n\ și\ dim\, Lin = m$ atunci sistemul fundamental de soluții conține $n - m$ vectori.

Exemplu. Compuneți sistemul omogen de ecuații liniare ce definește în $\mathbb{R}^4$ subspațiul $Lin(a_1, a_2, a_3, a_4)$, dacă $a_1 = (1,1,2,2), a_2 = (2,3,2,3), a_3 = (4,7,2,5), a_4 = (5,7,6,8)$.

Rezolvare. Construim matricea M ce are în calitate de coloane coordonatele vectorilor:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Pentru a determina dimensiunea învelișului liniar și o bază a acestuia, aducem matricea M la forma eșalon. În acest scop, din linia a doua scădem prima linie, la linia a 3-a adunăm prima linie înmulțită cu -2, iar din a 4-a linie scădem a 3-a. În rezultat obținem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Apoi păstrăm primele două linii, la linia a 3-a adunăm linia a 2-a înmulțită cu 2, iar din linia a 4-a scădem a doua și obținem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deci, $rang\, M = 2$, ceea ce implică că $dim\, Lin(a_1, a_2, a_3, a_4) = 2$. În calitate de bază a învelișului liniar putem considera vectorii $a_1\ și\ a_2$. Dimensiunea sistemului fundamental de soluții este:

$$dim\, \mathbb{R}^4 - dim\, Lin(a_1, a_2, a_3, a_4) = 4 - 2 = 2.$$

Deci, sistemul fundamental de soluții conține 2 vectori. Determinăm sistemul fundamental de soluții (f_1, f_2)

x_1	x_2	x_3	x_4
2	-3	1	0
-1	-2	0	1

Pentru $x_3 = 1, x_4 = 0$, avem:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4 = 0 \\ x_2 + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 4 \\ x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow f_1 = (2, -3, 1, 0)$$

Pentru $x_3 = 0, x_4 = 4$, avem:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5 = 0 \\ x_2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 5 \\ x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow f_2 = (-1, -2, 0, 1)$$

Pentru fiecare vector din sistemul fundamental de soluții scriem ecuația omogenă.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Răspuns. Sistemul omogen de ecuații liniare ce definește în $\mathbb{R}^4$ subspațiul $Lin(a_1, a_2, a_3, a_4)$ este:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Bibliografie:

1. GOIAN, I., MARIN, V. Spații vectoriale și operatori liniari. Chișinău, Ed. Lumina, 1993. – 210 p. ISBN 5-372-01384-2
2. DĂNEȚ, R.-M., TOHĂNEANU, Ș.O. Curs practic de algebră superioară. București, Ed. Matrix Rom, 2004. – 295 p. ISBN 973-685-686-0
3. ACHIRI, I., ș.a. Matematică: Manual pentru clasa a 11-a. Chișinău, Ed. Prut Internațional, 2020. – 306 p. ISBN 978-9975-54-514-3