CZU 517.4

CALCULUL DETERMINANȚILOR DE ORDIN SUPERIOR

Tatiana BÎRNAZ, *studentă, Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului, Universitatea de Stat „Alecu Russo" din Bălți*
Conducător științific: **Tatiana ROTARI,** *asist. univ.*

Abstract: *This article studies the concept of determinant and its properties. Some examples calculation of higher order determinants using Laplace's rule, properties of determinants are solved and explained. Determinants of finite order (order 4, 5, 6) as well as of undetermined order (order n) are calculated. Some techniques for calculating higher-order determinants are described, such as: bringing the determinant to the triangular form, the method of recurrences.*

Keywords: *determinant, Laplace's rule, the recurrence method, the triangular form of the determinant.*

Noțiuni generale

Determinantul reprezintă un concept important în matematică, fiind folosit în multe domenii, inclusiv în algebră, geometrie și fizică. Un determinant este o funcție matriceală care poate fi calculată pentru orice matrice pătrată. Determinanții sunt utilizați pentru a determina proprietăți importante ale matricelor, cum ar fi inversabilitatea și soluția sistemelor de ecuații liniare. În cadrul acestei teme, ne vom concentra în special asupra determinanților de ordin superior. Aceștia sunt determinanți ai matricelor care conțin alte determinante în loc de valori scalare. În esență, aceste matrice sunt construite prin înlocuirea unor elemente ale matricei originale cu determinanți altor submatrice. Determinanții de ordinul superior au o importanță deosebită întrucât sunt utilizați în multe domenii ale matematicii, cum ar fi teoria operatorilor și geometria diferențială. În plus, calculul acestora poate fi foarte util în rezolvarea problemelor practice, cum ar fi analiza circuitelor electrice sau modelarea sistemelor dinamice.

Definiție 1. Se numește **determinant al matricei** $A = (a_{ij}) \in M_n(C), n \geq 2$ sau **determinant de ordinul $\boldsymbol{n}$** numărul

$$\Delta = a_{11}(-1)^{1+1}\overline{M}_1^1 + a_{12}(-1)^{1+2}\overline{M}_2^1 + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}\overline{M}_n^1 = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\overline{M}_j^1 \quad [1].$$

Calculul determinanților în baza definiției este dificil dacă elementele lor conțin expresii voluminoase (radicali, logaritmi, numere complexe,...). Următoarele proprietăți ale determinanților vor facilita calculul lor. Determinanții de ordinul n au o serie de proprietăți importante, care sunt esențiale în algebra liniară și în multe alte domenii ale matematicii. În continuare vor fi descrise unele proprietăți ale determinanților ce sunt frecvent utilizate la calculul determinanților de ordinul n. Aceste proprietăți sunt descrise și demonstrate în majoritatea lucrărilor de algebră liniară și algebră superioară, inclusiv în [1].

Proprietatea 1. *(Proprietatea de liniaritate)* Dacă A, B și C sunt matrice pătratice de dimensiune $n \times n$ și k este scalar, atunci

$$det(kA) = k^n det(A).$$

Această proprietate permite simplificarea calculelor pentru determinanți, deoarece permite adunarea și înmulțirea scalarilor în afara determinanților. De asemenea, aceasta permite adunarea și scăderea matricelor, fapt care face mai ușoară calcularea determinanților pentru matrice mai complexe.

Proprietatea 2. *(Proprietatea de simetrie)* Determinantul unei matrice pătratice A este egal cu determinantul transpusei sale: $detA = detA^t$.

Această proprietate simplifică calculele pentru determinanți, deoarece transpunerea matricei poate fi o operație mai ușor de realizat decât calculul determinantul original.

Proprietatea 3. *(Proprietatea de înmulțire)* Dacă A și B sunt două matrice pătratice de dimensiune $n \times n$, atunci determinantul produsul determinanților lor: $det(AB) = detA\, detB$.

Această proprietate este importantă, deoarece permite calcularea determinanților pentru matrice mai complexe prin împărțirea lor în produse de matrice mai simple.

Proprietatea 4. La permutarea a două linii (coloane) determinantul își schimbă semnul în opus.

Proprietatea 5. Dacă două linii (coloane) ale determinantului coincid, atunci determinantul este 0.

Proprietatea 6. Factorul comun dintr-o linie (coloană) poate fi scos în fața determinatului.

Proprietatea 7. Valoarea determinantului nu se modifică dacă o linie (coloană) se adună altă linie (coloană) înmulțită la un număr.

Proprietatea 8. Dacă două linii (coloane) ale determinantului sunt proporționale, atunci determinantul este 0.

Aceste sunt doar câteva dintre cele mai importante proprietăți ale determinanților de ordin n, dar există multe altele. Studiul determinanților de ordin n este esențial în algebră și aceste proprietăți joacă un rol important în multe aplicații practice.

Exemplul 1. Calculați:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

Rezolvare. Pentru calculul acestui determinant se va efectua transformări elementare și anume: schimbăm linia 1 cu linia 4 și linia 2 cu linia 3. În baza proprietății 4, la permutarea a două linii semnul determinantului se schimbă în opus. Deoarece se efectuează două permutări consecutive de linii, semnul determinantului nu se va modifica. În rezultatul acestor transformări, determinantul primește forma:

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Răspuns. Valoarea determinantului este 24.

Teorema lui Laplace

Definiție 2. Determinantul matricei A este egal cu suma produselor minorilor de ordinul p ce se pot construi cu elementele a p linii (coloane) fixate ale matricei A și complemenții lor algebrici.

În particular, pentru $p = 1$, rezultă că oricare ar fi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixat, are loc egalitatea

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in},$$

numită regula de dezvoltare a determinantului matricei A după linia i. În mod asemănător, pentru orice $j \in \{1,2,\dots,n\}$ fixat, are loc egalitatea

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

numită regula de dezvoltare a determinantului matricei A după coloana j [1].

Exemplul 2. Calculați determinantul folosind teorema lui Laplace

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare. Pentru comoditate fixăm prima linie și descompunem determinantul după această linie.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 20 + 0 - 8 = -20.$$

Răspuns. Valoarea determinantului este -20.

Exemplul 3. Calculați [2]

$$\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}.$$

Rezolvare. Deoarece ordinul determinantului este 5, după utilizarea regulii lui Laplace este necesar de calculat cinci determinanți de ordinul patru, care, la rândul său, conțin câte patru determinanți de ordinul trei. În așa mod, pentru a calcula un determinant de ordinul cinci prin regula lui Laplace este necesar de calculat 20 determinanți de ordinul 3. Evident că acest procedeu este destul de anevoios, de aceea în așa situație este mult mai convenabil de utilizat o metodă combinată ce constă din utilizarea concomitentă a regulii lui Laplace și a proprietăților determinanților:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix} \overset{\substack{C1-C5 \\ C4-C3}}{=} \begin{vmatrix} 5 & 11 & 13 & 4 & 19 \\ 5 & 13 & 32 & 8 & 46 \\ 5 & 11 & 14 & 36 & 56 \\ 10 & 20 & 7 & 6 & 52 \\ 10 & 24 & 45 & 12 & 70 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 11 & 13 & 2 & 19 \\ 1 & 13 & 32 & 4 & 46 \\ 1 & 11 & 14 & 18 & 56 \\ 2 & 20 & 7 & 3 & 52 \\ 2 & 24 & 45 & 6 & 70 \end{vmatrix} \underset{\substack{L4-2L1 \\ L5-L4}}{\overset{\substack{L2-L1 \\ L4-L1}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 11 & 13 & 2 & 19 \\ 0 & 2 & 19 & 2 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & 16 & 37 \\ 0 & -2 & -19 & -1 & -14 \\ 0 & 4 & 38 & 3 & 18 \end{vmatrix} =$$

$$= 10\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 19 & 2 & 27 \\ 0 & 1 & 16 & 37 \\ -2 & -19 & -1 & 14 \\ 4 & 38 & 3 & 18 \end{vmatrix} \overset{\substack{L3+L1 \\ L4-2L1}}{=} 10\cdot\begin{vmatrix} 2 & 19 & 2 & 27 \\ 0 & 1 & 16 & 37 \\ 0 & 0 & 1 & 41 \\ 0 & 0 & -1 & -36 \end{vmatrix} =$$

$$= 10\cdot\begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 41 \\ -1 & -36 \end{vmatrix} = 20\cdot(-36+41) = 20\cdot 5 = 100$$

Răspuns. Valoarea determinantului este 100

Metoda de rezolvare de mai sus nu este mereu atât de simplu, iar în cazul în care ordinul determinantului este nedeterminat, atunci aceste metode se complică. Pentru calculul determinanților de așa formă nu există o metodă universală. Metoda de rezolvare a acestor determinanți variază în dependență de forma acestora.

a. Metoda aducerii determinantului la forma triunghiulară.

După cum este cunoscut, valoarea determinantului de formă triunghiulară este egală cu produsul elementelor de pe diagonala principală. Din acest fapt, utilizând transformările elementare asupra liniilor (coloanelor) determinantului, aducem determinantul la forma triunghiulară.

Exemplul 4. Calculați [2]

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$$

Rezolvare. Pentru început scădem din fiecare linie precedentă și păstrăm linia. În rezultat, obținem determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n n$$

Determinantul obținut este de formă special și anume, are forma triunghiulară în raport cu diagonala secundară. Pentru a calcula determinantul, este necesar de adus la forma diagonală în raport cu diagonala principală. În acest scop, permutăm coloanele *i* și *n-i*. Atunci determinantul primește forma:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n$$

Răspuns. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n.$

b. Metoda recurențelor

Metoda recurențelor constă în utilizarea regulii lui Laplace până în momentul în care determinantul se exprimă printr-o relație de recurență. Determinantul inițial se exprimă printr-o combinație liniară de determinanți de aceeași formă, însă de ordin mai mic. Această metodă de calcul a determinanților este descrisă în [2]. Fie că descompunerea determinantului este:

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, n > 2.$$

Dacă $q = 0$, atunci relația de mai sus poate fi privită ca o geometrică. Atunci

$$D_n = p^{n-1}D_1.$$

În acest caz $D_1 = a_{11}$. Dacă $q \neq 0$, atunci alcătuim și rezolvăm ecuația:

$$x^2 - px - q = 0.$$

Fie că soluțiile ecuației pătrate sunt: $x_1 = \alpha, x_2 = \beta$. Dacă $\alpha \neq \beta$, atunci căutăm soluția recurenței în forma

$$D_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n.$$

unde c_1 *și* c_2 sunt coeficinți nedeterminați ce se determină rezolvând sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \alpha c_1 + \beta c_2 = D_1, \\ \alpha^2 c_1 + \beta^2 c_2 = D_2. \end{cases}$$

Dacă $\alpha = \beta$, atunci căutăm soluția recurenței în forma

$$D_n = \alpha^n[(n-1)\cdot c_1 + c_2].$$

Exemplul 5. Calculați [2]

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

Descompunem determinantul după linie:

$$D_n = 7D_{n-1} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

Descompunem determinantul obținut după prima coloană. Atunci

$$D_n = 7 \cdot D_{n-1} - 12D_{n-2}.$$

Ecuația caracteristică a acestei recurențe este:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$D_n = c_1 4^n + c_2 3^n$$

Formăm sistemul de ecuații pentru a determina coeficienții c_1 *și* c_2

$$\begin{cases} 4c_1 + 3c_2 = 7, \\ 16c_1 + 9c_2 = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 4, \\ c_2 = -3. \end{cases}$$

Răspuns. $D_n = 4^{n+1} - 3^{n+1}$.

Exemplu 6. Calculați [2]

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Descompunem determinantul după prima coloană:

$$D_n = 5\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Fiecare determinant obținut este de ordinul $n-1$. Descompunem determinanții după prima linie:

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Descompunem al doilea determinant după prima coloană. În rezultat obținem relația de recurență

$$D_n = D'_{n-2} - 10D'_{n-3}$$

unde

$$D'_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Calculăm determinantul D'_n. Descompunem acum după prima coloană, apoi determinantul obținut descompunem după prima linie. Pentru determinantul D'_n avem relația de recurență:

$$D'_n = 3D'_{n-1} - 2D'_{n-2}$$
$$D'_n = 2^{n+1} - 1$$
$$D'_{n-2} = 2^{n-1} - 1$$
$$D'_{n-3} = 2^{n-2} - 1$$

Atunci

$$D_n = 9 - 2^{n+1}$$

Răspuns. $9 - 2^{n+1}$

Bibliografie:

1. ACHIRI I., ș.a. *Matematică:* Manual pentru clasa a XI-a. Chișinău, Ed. Prut Internațional, 2020. – 304 p. ISBN 978-9975-54-514-3
2. ПРОСКУРЯКОВ, И. Сборник задач по линейной алгебре. Москва, Изд. Бином Лаборатория знаний, 2005. – 383 стр. ISBN 5-94774-209-8