

EVOLUȚIA SISTEMULUI DE AȘTEPTARE $[SM|M|I|_{\infty}]^N$ ÎN SCHEMA DE MEDIERE

Iulia DAMIAN,
Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălți

Abstract: *Stochastic approximation in queuing system is already well known and established approach. The main reason is that such systems are very large and so it is difficult and often impossible to handle them by usual methods of Markov and semi-Markov processes. The specific queuing system is that the series scheme is considered with phase merging procedure.*

In this article study the queuing system where the input flow is described by a semi-Markov process, the service time is exponentially distributed. This article is about of the weak convergence in average scheme. It is study average scheme for semi-Markov queuing systems $[SM|M|I|_{\infty}]^N$ by a random evolution approach and using compensating operator of the corresponding extended Markov process.

1. Introducere

Aplicații considerabile ale teoriei așteptării au avut loc în soluționarea problemelor ce au apărut în proiectarea și optimizarea sistemelor de prelucrare și transport a informației, în particular în rețelele de telecomunicații. Diverse aspecte ale acestor probleme, cum ar fi, probleme de optimizare, cercetarea sistemelor cu priorități, cu surse finite, etc., au fost precăutate de A.M.Andronov, E.A.Danielean, P.P.Bociarov, A.N.Dudin, V.A.Ivnițkii, V.V.Kalașnicov, A.V.Pecinkin, A.N.Kabalevskii, G.K.Mișcoi, V.V.Rykov, I.I.Falin, V.V.Vishnevskii ș.a. Cele mai elegante rezultate au fost obținute aici pentru sisteme cu fluxuri staționare de tip Poisson. Situația însă radical s-a schimbat odată cu dezvoltarea vertiginoasă a rețelelor. Apariția a noilor web servicii, transportul integral al datelor, glasului, videoinformației precum și apariția noilor tehnologii de rețea înzestrate cu metodologiile QoS(quality of service) și CoS(class of service) de dirijare a calității serviciilor au înaintat noi cerințe în cercetarea și elaborarea modelelor matematice. Modelele propuse pentru descrierea adecvată a noilor fenomene devin mult mai complicate, iar cercetarea lor implică noi abordări. Aceeași situație complicată este și în domeniul modelelor rețelelor stochastice.

Dezvoltarea semnificativă a rețelelor de așteptare este descrisă în lucrările Korolyuk V.S, Svischuka A.V, Korolyuk V.V, Turbin A.F, Skorokhod A.V, Ghihman I.I și alții. Însă aici apar un șir de probleme noi, deoarece în rețelele stocastice fluxul de ieșire a mesajelor de la un nod formează fluxul de intrare la un alt nod(sau alte noduri), care nu este de tip Poisson. Totodată și servirea mesajelor în nodurile acestor rețele nu mai este dirijată de repartiția exponențială. Astfel de rețele se numesc rețele de tip semi-Markov sau semimarkoviene. De aceea, analiza matematică a rețelelor semimarkoviene este complicată și necesită aplicarea unor compartimente moderne ale matematicii.

Cele mai eficiente metode matematice de simplificare a sistemelor de așteptare sunt: metoda de mediere și metoda aproximației difuzionale. Metoda de mediere permite de a obține modelul simplificat determinat al sistemului de așteptare. Rezolvarea problemei de optimizare pentru modelul de mediere simplificat este cu mult mai ușoară decât optimizarea modelul inițial. În lucrarea dată se studiază schema asimptotică de mediere pentru sistemele de așteptare semi-Markov date de o evoluție aleatoare și folosind operatorul de compensație a procesului Markov extins corespunzător.

Aproximația stohastică în sistemele de așteptare este deja cunoscută și stabilită¹²³⁴⁵⁶. Principalul motiv este că astfel de sisteme sunt foarte dificile și, deseori, este imposibil de a opera cu ele, folosind metodele proceselor Markov și semi-Markov.

2. Sistemul de așteptare $[SM|M|I|_{\infty}]^N$ în schema de mediere

¹ANISIMOV, V., LEBEDEV, V. *Stochastic Queuing Networks. Markov Models*. Lybid,1992.

² ANISIMOV, V. *Switching processes in Queuing Models*. ISTE, J. Wiley, London, 2008.

³ KOROLYUK, V., MISHKOY, G., MAMONOVA, A., GRIZA, I.U. Queuing system evolution in phase merging scheme. In: *Bulletin Academy of Science of Moldova. Mathem*, 2008, N.3, p. 83-88.

⁴ KOROLYUK, V.S, KOROLYUK, V.V. *Stochastic Models of Systems*. Kluwer Dordrecht, 1999.

⁵ LEBEDEV, E. On limit theorem for stochastic networks and its application. In: *Theory of Probability and Math. Stat.*, 2002, № 68, p.94-98.

⁶ SILVESTROV, D. *Limit Theorems for Randomly Stopped Stochastic Processes*. Springer, N.Y, 2004

Sistemul de așteptare de tipul $[SM / M / 1 / \infty]^N$ înseamnă că fluxul de intrare este descris de procesul Markov de regenerare, timpul de servire este distribuit exponențial, sunt conectate n-servere printr-o matrice de probabilitate. Deci, rețelele de așteptare sunt considerate cu flux semi-Markov.

Sistemul de așteptare de tipul $[SM / M / 1 / \infty]^N$ este considerat în schemele serii cu un mic parametru $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$).

Vom folosi procesul semi-Markov regulat $\kappa^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, pe un spațiu fazic standart (E, ε) în schema de mediere cu un mic parametru $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon > 0$.

Evoluția cererilor în rețele pe mulțimea $\hat{E} = \{1, 2, \dots, N\}$ este definită de matricea de probabilitate $P_0 = [p_{kr}^0; k, r \in \hat{E}]$, $\hat{E} = \{1, 2, \dots, N\}$, și de vectorul de intensitate a timpului de servire descris exponențial $\mu = (\mu_k, k \in \hat{E})$.

Rețelele de așteptare sunt deschise, ceea ce înseamnă că matricea de probabilitate satisface condiția:

$$p_{k0}^0 = 1 - \sum_{r=1}^N p_{kr}^0, \quad \max_{k \in \hat{E}} p_{k0}^0 > 0$$

Procesul de așteptare în schema de mediere este considerat în următoarea formă normalizată:

$$U^\varepsilon(t) = \varepsilon^2 \rho^\varepsilon(t/\varepsilon^2), \quad t \geq 0, \quad \varepsilon > 0,$$

unde $\rho^\varepsilon(t) = (\rho_k^\varepsilon(t), k \in \hat{E})$ este vectorul cu componentele $\rho_k^\varepsilon(t)$ - numărul de cereri în nodurile $k \in \hat{E}$ în momentul de timp t . Sistemul de așteptare este considerat într-un regim de trafic: $\rho_k^\varepsilon(0) = u_k/\varepsilon^2$, $k \in \hat{E}$.

Următoarele afirmații se presupun a fi juste ¹²:

A1: Rețelele de așteptare sunt deschise, ceea ce înseamnă că matricea de probabilitate satisface condiția:

$$\max_{k \in \hat{E}} p_{k0}^0 > 0$$

A2: Există soluție nenegativă a ecuației de evoluție

$$dU^0(t)/dt = C(U^0(t)), \quad U^0(0) = u_0,$$

unde vectorul-viteză $C(u) = (C_k(u), k \in \hat{E})$,

este definit de componentele

$$C_k(u) = \gamma_k(u) + \lambda_k, \quad \lambda_k = \hat{\pi}_k q_k,$$

$$\gamma_k(u) = \sum_{r=1}^N \mu_r u_r [p_{rk} - \delta_{rk}].$$

Teorema (Criteriul de mediere):

Conform afirmațiilor A1-A2, convergența slabă

$$U^\varepsilon(t) \Rightarrow U^0(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

(1)

are loc.

Propoziția: Fie că există un punct de echilibru $u^0 \geq 0$, satisfăcând condiția

$$C(u^0) = 0.$$

Atunci, conform condiției inițiale

$$U^\varepsilon(0) \Rightarrow u_0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

¹ MAMONOVA, A. Exploited queuing system type $[SM / M / 1 / \infty]^N$ in average scheme. In: *Proceeding of the Applied Mathematics and Mechanics Institute*, 2005, v. 10, p.135-144.

² MAMONOVA, A. Superposition Markov renewal processes in phase merging. In: *Cybernetics and System Analysis*, 2005, v. 41, p. 119-135.

convergența slabă

$$U^\varepsilon(t) \Rightarrow u_0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

are loc.

Demonstrarea Teoremei: Procesul Markov regenerat

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \quad \kappa_n^\varepsilon = \kappa^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \quad \tau_n^\varepsilon = \varepsilon^2 \tau_n, \quad n \geq 0,$$

este caracterizat de Operatorul de Compensatie¹

$$L^\varepsilon \varphi(u, x) = \varepsilon^{-2} q(x) E [\varphi(u_{n+1}^\varepsilon, \kappa_{n+1}^\varepsilon) - \varphi(u, x) | u_n^\varepsilon = u, \quad \kappa_n^\varepsilon = x] \quad (2)$$

Pasul principal în analiza asimptotică a sistemelor de așteptare este de a construi o extindere asimptotică a operatorului de compensație (2) cu un parametru de serie $\varepsilon \rightarrow 0$, ($\varepsilon > 0$).

Lema: Operatorul de compensație (2) poate fi reprezentat în următoarea formă

$$L^\varepsilon \varphi(u, x) = \varepsilon^{-2} q(x) [G^\varepsilon(x) P^\varepsilon D^\varepsilon(x) - I], \quad (3)$$

$$G^\varepsilon(x) = \int_0^\infty G_x^\varepsilon(dt) \Gamma_t^\varepsilon. \quad (4)$$

unde

Semigrupul Γ_t^ε este definit de generatorul

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = \sum_{k,r=1}^N \gamma_{kr}(u) [\varphi(u + \varepsilon^2 e_{kr}) - \varphi(u)], \quad (5)$$

aici vectorul de salt

$$e_{kr} := e_r - e_k, \quad e_k := (\delta_k(l), \quad l \in \hat{E}), \quad k \in \hat{E}, \quad \delta_k(l) = \begin{cases} 1, & l = k, \\ 0, & l \neq k. \end{cases}$$

și intensitatea saltului:

$$\gamma_{kr}(u) := u_k \mu_k p_{kr}^0, \quad k = \overline{1, N}, \quad r = \overline{0, N}, \quad k \neq r.$$

Operatorii $D^\varepsilon(k)$, $k \in \hat{E}$, sunt definiți de

$$D^\varepsilon(k) \varphi(u) = \varphi(u + \varepsilon^2 e_k), \quad k \in \hat{E}.$$

Operatorul

$$P^\varepsilon = P + \varepsilon P_1,$$

$$\text{unde } P\varphi(x) = \int_E P(x, dy) \varphi(y), \quad P_1\varphi(x) = \int_E P_1(x, dy) \varphi(y).$$

Lema. Operatorul de compensație (2) admite următoarea extindere asimptotică pe o funcție $\varphi(u, x) \in C^3(\mathbb{R}^d)$ uniformă după $x \in E$:

$$L^\varepsilon \varphi(u, x) = [\varepsilon^{-2} Q + \varepsilon^{-1} Q_1 + Q_2(x) + \theta_L^\varepsilon(x)] \varphi(u, x) \quad (6)$$

unde

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_E P(x, dy) [\varphi(y) - \varphi(x)] \quad (7)$$

$$Q_1\varphi(x) = q(x) \int_E P_1(x, dy) \varphi(y) \quad (8)$$

$$\lambda(x) = (\lambda_k(x), \quad k \in \hat{E}), \quad \lambda_k(x) = q(x) \delta_k(x) \quad (9)$$

$$Q_2(x) \varphi(u) = [\gamma(u) + \lambda(x)] \varphi'(u) \quad (10)$$

$$\gamma(u) = \mu^*(u) [P_0 - I], \quad \gamma(u) = (\gamma_k(u), \quad k \in \hat{E}), \quad \gamma_k(u) = \sum_{r=0}^N \mu_k u_k [p_{kr}^0 - \delta_{kr}] \quad (11)$$

și termenul neglijabil

$$|\theta_L^\varepsilon(x) \varphi(u)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \varphi(u) \in C^3(\mathbb{R}^N).$$

¹ ANISIMOV, V., LEBEDEV, V. *Stochastic Queuing Networks. Markov Models*. Lybid, 1992.