

COMUNICĂRI ÎN PLEN

CZU 519.2(072.8)

PREGĂTIREA VIITORILOR PROFESORI PENTRU PREDAREA ELEMENTELOR DE PROBABILITATE ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

Natalia GAȘIȚOI, dr., conf. univ.

Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului,
Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălți

Abstract: *For more than 20 years probability and statistics are part of the mathematics curricula for gymnasium and high-school in the Republic of Moldova. However, we find that even now some teachers face difficulties in teaching probability and statistics contents. In this paper we analyse some reasons of these difficulties, and describe some recommendations and possible activities for training future teachers to teach probability and statistics.*

Keywords: *didactic of Mathematics, teaching technics, counting problems, probability, statistics.*

Conform Codului educației al Republicii Moldova, una din competențele-cheie a căror formare trebuie asigurată în procesul educațional este competența în matematică [1, art. 11, alin. (2)].

Totuși, remarcăm că în topul preferințelor elevilor, pentru examenul de bacalaureat la disciplina la alegere, matematica nu se regăsește. De exemplu, în anul 2019, numărul candidaților care au selectat disciplina matematica l-a depășit doar pe cel al elevilor care au selectat disciplina fizica, fapt care, o dată în plus, confirmă constatarea academicianului român Solomon Marcus „Rareori se întâmplă ca matematica să fie privită cu indiferență; atitudinea neutră față de ea este mult mai puțin frecventă decât atitudinea extremă, într-un sens sau altul. Datele de care dispunem arată că detractorii sunt incomparabil mai mulți decât admiratorii” [2, p. 37].

În acest context este firească întrebarea: ce competențe profesionale ar trebui formate viitorilor profesori de matematică capabili să predea în orice condiții, inclusiv cele pandemice, astfel încât să crească interesul elevilor pentru matematică și cum asigurăm formarea acestor competențe?

Un profesor de matematică trebuie să fie capabil:

- să explice conceptele matematice, adaptând vocabularul și gradul de complexitate la elevul real, cel din clasa în care profesorul devine mentor, îndrumător și educator;
- să convingă elevii de importanța dezvoltării competențelor în matematică prin exemple de aplicare a matematicii la rezolvarea problemelor aplicative, a celor din cotidian;
- să transforme, utilizând diverse tehnologii informaționale, clasa din regim „față-în-față” în cea „virtuală”;
- să fie sigur atunci când își expune părerea vis-a-vis de subiecte matematice;
- să identifice factorii relevanți diferitor situații didactice și să țină cont de ei în proiectarea activităților;
- să poată formula argumente „pro” sau „contra” unor idei conceptuale sau soluții propuse pentru anumite situații didactice;
- să analizeze critic documentele curriculare, ghidurile, manualele și alte materiale didactice în care abundă astăzi Internetul;
- să prezică dificultățile cu care se confruntă elevii, erorile, strategiile de rezolvare a problemelor;
- să interpreteze răspunsurile elevilor;
- să alcătuiască teste de evaluare și să le analizeze critic;
- să dezvolte idei prin discuții și colaborări cu colegii săi etc.

Formarea inițială a profesorilor de matematică trebuie să asigure dezvoltarea competențelor enumerate, perfecționarea cărora se realizează pe întreg parcursul activității didactice.

În anul 2019, în sistemul educațional preuniversitar a început implementarea treptată a Curriculumului Național (nou) la disciplina matematica, în care, atât în treapta gimnazială, cât și în cea liceală, se regăsesc subiecte din probabilitate și statistica matematică.

Introducerea în Curriculumul preuniversitar la disciplina matematica a elementelor de probabilitate și statistică matematică s-a realizat acum circa 20 de ani, dar și astăzi unele cadre didactice întâmpină greutăți în predarea acestor subiecte. Unele dintre motivele pentru care predarea, dar și învățarea, acestor teme este dificilă sunt următoarele:

- lipsa tradițiilor de predare a acestor subiecte;
- părinții elevilor, care au un rol important de partener al profesorului, nu au cunoștințele și nici competențele necesare în domeniul probabilităților și statisticii;
- lipsa indicațiilor metodice, a ghidurilor de predare-învățare-evaluare a acestor subiecte, iar recomandările metodice generale aplicabile pentru predarea algebrei, geometriei, elementelor de analiză matematică etc. nu se potrivesc pentru predarea elementelor de probabilitate și statistică matematică;
- proiectarea lecțiilor de predare-învățare-evaluare a acestor teme; planificarea experimentelor aleatoare și proiectelor necesită mult timp;
- elevii sunt obișnuiți cu faptul că între fenomene și evenimente există legi care, de regulă, se prezintă prin formule, astfel încât se creează impresia că toate evenimentele sunt oarecum predefinite, iar atunci când încep studiul experimentelor și evenimentelor aleatoare unii tind spre cealaltă extremă, confundând „aleatoriu” cu „orice vreau” sau „fantastic”;
- elevii sunt obișnuiți cu faptul că în matematică avem o serie de reguli și algoritmi pe care ei îi aplică cu succes la rezolvarea de ecuații și inecuații, la studiul funcțiilor etc., în timp ce în studiul elementelor de probabilitate nu mai avem astfel de reguli;
- problemele textuale de probabilitate sunt tratate de elevi, dar și de unii profesori, ca fiind nestandard; adeseori textele problemelor de probabilitate înșală – unele probleme au o descriere a condițiilor de jumate de pagină, iar în esență rezolvarea problemei este simplă și se reduce în final la un singur rând, cu calcule simple;
- elevilor le vine greu să exprime în cuvinte ideile lor referitoare la probabilitate, întrucât nu mai regăsesc încadrarea în dimensiunile temporale obișnuite „a fost”, „este” sau „va fi”, dar trebuie să opereze corect cu „ar putea fi” sau „se poate întâmpla” etc.

În pofida dificultăților enumerate, importanța și necesitatea studierii elementelor de probabilitate și statistică matematică în cursul preuniversitar de matematică este argumentată de următoarele:

- dezvoltarea gândirii probabilistice este necesară generației tinere de cetățeni, care zilnic sunt expuși informațiilor, statisticilor oferite de către persoanele publice sau mass-media și care necesită o evaluare critică;
- înțelegerea greșită de către populație a datelor statistice și a metodelor statistice poate conduce la creșterea neîncrederii între cetățeni și stat (cuvântul „statistică” provine de la cuvântul latin „status” cu sensul de stat, stare politică; de la cuvântul italian „statista” cu sensul de politician sau om de stat, de la cuvântul german „statistik” cu sensul de știință care se ocupă cu date despre starea unui stat sau a unei comunități);
- probabilitatea are aplicații largi în viața de zi cu zi, în procesul de evaluare a riscurilor și de luare a deciziilor;
- statistica servește drept instrument de investigare necesar într-o multitudine de domenii;
- cunoașterea noțiunilor de bază respective este necesară în majoritatea domeniilor: fizică, informatică, educație, asigurări, comerț, economie, servicii bancare etc.

Ținând cont de cele menționate, considerăm necesară includerea în programele de master în domeniul Științe ale educației (Didactica matematicii) a unui curs de formare a competențelor de predare a elementelor de probabilitate și statistică.

În treapta gimnazială este important ca profesorul să acorde o atenție sporită determinării și reprezentării schematice a mulțimii rezultatelor unui experiment aleator. Pentru aceasta recomandăm rezolvarea de probleme în care mulțimea rezultatelor este finită și poate fi reprezentată cu ajutorul diagramelor-arbore, tabelor, diagramelor Wenn-Euler, grafurilor, schemelor etc. Totodată, e important ca elevii să conștientizeze că unele experimente pot avea o infinitate de rezultate posibile, cu acest scop pot fi propuse spre analiză probleme asociate cu probabilită-

țile geometrice (modelul ariilor) sau cele care se reprezintă simplu printr-o diagramă arbore (de exemplu, aruncarea monedei până la apariția feței cu stema). Pentru dobândirea progresivă a cunoștințelor, elevilor trebuie să li se formeze treptat înțelegerea conceptului de probabilitate, utilizând inițial o scală a șanselor, discutând despre probabilități experimentale și ulterior despre definiția clasică a probabilităților și condiția de echiprobabilitate în care ea se aplică. Prin experimente și simulări putem ajuta elevul să înțeleagă legea numerelor mari, legătura dintre frecvența relativă de realizare a unui eveniment aleator și probabilitate. Adeseori, când încep rezolvarea unei probleme de probabilitate, elevii se concentrează direct pe evenimentul probabilitatea căruia trebuie calculată și nu analizează experimentul propriu-zis. Este important ca elevii să-și imagineze experimentul, de parcă l-ar realiza ei și să descrie câteva rezultate posibile, apoi să afle numărul rezultatelor posibile ale experimentului și doar ulterior să calculeze numărul cazurilor favorabile evenimentului urmărit.

Referindu-ne la studiul elementelor de statistică în cursul gimnazial de matematică, putem recomanda discutarea condițiilor de colectare corectă a datelor statistice pentru asigurarea reprezentativității elementelor, varietatea de metode de reprezentare grafică a datelor, cu evidențierea avantajelor sau dezavantajelor anumitor scheme și diagrame. Este important ca în procesul discuțiilor la orele de matematică profesorul să identifice greșelile de gândire ale elevilor, dar trebuie să se asigure o balanță între ghidarea profesorului și independența elevului, care este absolut necesară pentru asigurarea înțelegerii profunde a conținuturilor respective.

Viitorul profesor de matematică trebuie să cunoască istoria dezvoltării teoriei probabilităților, care este un domeniu matematic relativ tânăr, iar dezvoltarea formală a ei este asociată cu un șir de probleme legate de jocurile de noroc, de paradoxurile care scot în evidență disparitatea dintre intuiție și matematica formală. Nu este deloc ușor de dezvoltat elevilor modul de gândire probabilistic, de aceea, încă de la etapa de formare inițială, viitorii profesori de matematică trebuie să mediteze asupra unor situații didactice în care să abordeze probleme de probabilitate soluțiile cărora au un caracter contraintuitiv foarte pronunțat.

Un exemplu simplu de problemă cu o soluție contraintuitivă, care poate fi propus spre analiză elevilor, este următorul: presupunem că se aruncă succesiv o monedă și după fiecare aruncare se înregistrează rezultatul. Admitem că de cinci ori succesiv a căzut doar stema:

$S, S, S, S, S.$

La întrebarea „ce e mai probabil să cadă la următoarea aruncare, „stema” sau „banul”?”, majoritatea elevilor răspund intuitiv că, după cinci căderi succesive a monedei cu stema în sus, e mai probabil ca la a șasea aruncare să cadă deja banul. Dacă însă elevilor li se va dezvolta stilul probabilistic de gândire, atunci o analiză simplă îi va conduce spre ideea că rezultatele precedente nu influențează în nici un fel rezultatele următoare (evenimentele fiind independente) și deci la cea de a șasea aruncare a monedei, după ce de cinci ori la rând s-a înregistrat „stema”, apariția „stemei” este la fel de probabilă ca și apariția „banului”.

O situație similară se urmărește și în cazul loteriilor. Chiar dacă elevii conștientizează că șansele de câștig sunt foarte mici, exemplele concrete de câștig îi fac să creadă în „noroc” și unii chiar reproșează că, în pofida probabilității mici de câștig, ei cunosc persoane care au câștigat la loterie și deci se merită să „încerce norocul”. În astfel de situații urmărim confuzia între două evenimente aleatoare diferite „persoana A va câștiga la loterie” și „cineva va câștiga la loterie”. Primul eveniment are o probabilitate mică de realizare și depinde de numărul biletelor câștigătoare puse în joc, în timp ce ultimul eveniment este sigur și are probabilitatea egală cu 1.

O altă problemă contraintuitivă poate fi ușor modelată după celebra problemă de împărțire a mizei formulată de către pasionatul jucător Chevalier de Méré. De exemplu, în finala competițiilor sportive la tenis de masă au ieșit două echipe A și B. Câștigătoare se declară acea echipă care câștigă trei partide în finală și intră în posesia fondului de premiere de 3000 de lei. Până la 11 martie 2020 s-au desfășurat trei partide și s-a înregistrat scorul 2:1 în favoarea echipei A. Întrucât din 11 martie 2020 procesul educațional în regim „față-în-față” a fost sistat, nu a mai fost posibilă continuarea competiției. Astfel apare întrebarea: cum trebuie împărțit fondul de premiere?

Fără a analiza mult problema, majoritatea elevilor vor răspunde ori că nu e corect în general de împărțit fondul de premiere întrucât nu a fost desemnat un câștigător, ori că echipei A trebuie să i se dea 2000 de lei, iar echipei B trebuie să i se dea 1000 de lei. Greșeala pe care o comit cei care aleg prima variantă este una tipică pentru elevii care confundă „aleatoriul” cu „orice se poate imagina” și abaterea de fapt de la întrebarea formulată în problemă. Greșeala pe care o comit cei care aleg a doua variantă este lipsa gândirii probabiliste, neținând cont de șansele de a ieși învingătoare pe care le au echipele și intuitiv aleg împărțirea fondului de premiere proporțional cu rezultatul deja produs. O analiză probabilistică elementară, de exemplu reprezentarea rezultatelor posibile pe o diagramă-arbore, conduce imediat spre rezultatul corect: echipei A trebuie să i se acorde 2250 de lei, iar echipei B – 750 lei.

De regulă, la primele ore de probabilitate elevilor li se propun experimente aleatoare cu monede, cu zaruri sau cu cutii cu bomboane. Aceste experimente sunt potrivite pentru înțelegerea esenței problemelor de probabilitate, pentru verificarea răspunsurilor intuitive, dar este important ca elevii să fie ulterior atrași în discuții, interpretare de rezultate și argumentare. Astăzi și tehnologiile informaționale pot veni în ajutor cu diverse programe de simulare a aruncării monedei sau zarului. Totuși aceste experimente simple nu explică metodele principale de rezolvare a problemelor de probabilitate care se realizează cu ajutorul schemelor de combinatorică sau cu ajutorul diagramelor-arbore.

Este cert faptul că unii elevi disting cu greu diferențele dintre conceptele de combinare, aranjament și permutare, ceea ce produce efecte negative în studiul elementelor de probabilitate și statistică, în care chiar și cele mai simple probleme se reduc în esență la câteva probleme de combinatorică. Transferul studierii modulului „Elemente de combinatorică” din clasa a X-a în clasa a XII-a, realizat în anul 2019 prin implementarea curriculumului nou la disciplina matematica, este orientat spre facilitarea înțelegerii și rezolvării corecte a problemelor de probabilitate.

Culegerile de probleme de acum câțiva ani conțin o multitudine de probleme cu cărți de joc, jocul de dame, jocul de șah, domino etc., care astăzi nu se bucură de o popularitate mare între elevi: unii nici nu cunosc câte pătrățele sunt pe tabla de șah, care sunt mișcările permise pentru figurile de șah și chiar cărțile de joc sunt o enigmă pentru unii. Din acest motiv rezolvarea problemelor se complică, întrucât condițiile problemelor sunt neclare pentru unii elevi, în loc să se gândească la o situație probabilistică concretă ei discută regulile jocului respectiv. De aceea recomandăm ca profesorii să selecteze sau să alcătuiască probleme de probabilitate cât mai aproape de situațiile reale trăite de elevi.

De exemplu, se pot alcătui probleme asociate cu sportul de următorul tip: Antrenorul echipei școlare de atletică ușoară trebuie să selecteze din cei 8 elevi ai secției 4 sportivi pentru o ștafetă de 4 câte 100 m. Câte posibilități are antrenorul dacă:

- a) ordinea în care vor alerga sportivii nu contează;
- b) ordinea în care vor alerga sportivii contează.

Să se calculeze, pentru ambele situații, probabilitatea că Ionel va fi selectat.

Profesorul poate alcătui probleme similare, reieșind din contextul clasei cu care lucrează. Dacă în clasă sunt elevi pasionați de automobile, atunci problemele tradiționale cu cartonașe pe care sunt scrise litere sau cuvinte pot fi reformulate astfel încât să fie mai aproape de interesele elevilor. De exemplu: În anul 2020 sloganul „Plăcerea de a conduce” a împlinit 55 de ani (sintagma care definește esența mărcii BMW a fost adoptată oficial în anul 1965). Într-un salon de automobile BMW patru cartonașe, pe care sunt scrise câte un cuvânt: „plăcerea”, „de”, „a”, „conduce” sunt puse într-o cutie. Dacă la extragerea succesivă din cutie a câte un cartonaș și aranjarea acestora de la stânga la dreapta se formează sloganul companiei BMW, atunci clientul primește o reducere suplimentară de 15%. Care sunt șansele ca un client să beneficieze de această ofertă?

Considerăm că viitorul profesor de matematică trebuie pregătit pentru predarea elementelor de probabilitate și statistică în cadrul unei unități curs inclusă în programul de master. Întrucât elevii urmează să-și formeze cunoștințele referitoare la probabilitate și statistică într-un mod activ, interacționând cu colegii, implicându-se în discuții, analizând, argumentând, interpre-

tând, atunci ar trebui să avem aceeași abordare și în procesul de formare a viitorilor profesori de matematică: punând accent pe dezvoltarea gândirii critice, a gândirii creative. Urmărind acest scop, recomandăm ca activitățile didactice să fie axate pe:

- elaborarea de proiecte de lecții;
- elaborarea de materiale didactice (fișe de observații, tabele pentru înregistrarea datelor, diagrame-arbore etc.);
- elaborarea de sarcini experimentale, cu propunerea ulterioară colegilor pentru realizare;
- alcătuirea de probleme;
- elaborarea sarcinilor pentru proiecte în grup și individuale;
- simularea lecțiilor;
- analiza lecțiilor etc.

În realizarea acestor sarcini, viitorii profesori de matematică ar trebui să țină cont de următoarele recomandări:

- accentul în predarea elementelor de probabilitate și statistică matematică trebuie pus nu pe demonstrații riguroase și calcule, dar pe înțelegerea clară a conceptelor *aleator*, *variabilă aleatoare*, *probabilitate*, *valori medii*, *dispersie* etc.;
- schimbarea radicală a stilului de organizare a lecției. La orele de matematică elevii sunt obișnuiți cu faptul că scriu mult, realizează multe calcule în baza unor algoritmi clari, ceea ce deja nu mai este aplicabil dacă studiem probabilitatea și statistica (în cazul statisticii, contrar tradițiilor de la orele de matematică, se recomandă folosirea calculatoarelor pentru calcule). La lecțiile dedicate subiectelor de probabilitate și statistică trebuie valorificat la maxim potențialul intelectual al elevilor, care mai mult discută, argumentează, înaintează ipoteze etc.;
- comportamentul elevului trebuie schimbat atât în timpul orelor, cât și în timpul de pregătire pentru lecție;
- selectarea și alcătuirea problemelor netradiționale, aproape de situațiile reale, pentru stimularea elevilor pentru investigații;
- elaborarea lucrărilor practice, experimentale, cu atragerea ulterioară a elevilor în discuții (interpretare, argumentare);
- folosirea rațională a calculatorului;
- elaborarea proiectelor de cercetare;
- statistica nu trebuie redusă la exerciții de calcul, este extrem de important ca elevii să poată interpreta toate rezultatele etc.

Bibliografie:

1. Codul educației al Republicii Moldova: nr. 152 din 17.07.2014. In: *Monitorul Oficial al Republicii Moldova*. 24.10.2014, nr. 319-324, art. 634
2. MARCUS, Solomon. *Singurătatea matematicianului*. Ed. LiterNet, Colecția Palimpsest, 2010. 179 p. ISBN 978-973-122-021-5