CZU 511.11

NUMERE COMPLEXE. PLANUL COMPLEX. MULȚIMEA LUI MANDELBROT

Veronica GUȘAN, *studentă,*
Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului,
Universitatea de Stat „Alecu Russo”, Bălți
Conducător științific: **Natalia GAȘIȚOI,** *dr., conf. univ.*

Abstract: *In this article we try to answer a few questions. Where did the complex numbers start from? How are complex numbers defined? Where and how do we represent complex numbers? What is the Mandelbrot set? We know that the multitude of complex numbers is fantastic, but it is even more interesting that with the help of these numbers, amazing images can appear on the complex plane. Thanks to Gaston Julia and Benoît Mandelbrot, today it is possible to visualize a fractal set, which being colored according to an algorithm, we enjoy the eyes with extremely beautiful images. Mandelbrot's set, in addition to the interesting features it possesses, also has an aesthetic value, which cannot be denied.*
Keywords: *complex numbers, complex plane, Mandelbrot set, fractal.*

De unde au pornit numerele complexe?

Există concepția despre faptul că numerele complexe ar fi apărut din necesitatea de a rezolva ecuațiile pătrate. De fapt, acest lucru este greșit: sarcina de a găsi rădăcinile unei ecuații pătrate nu atinge în niciun fel numerele complexe. Ne putem convinge de aceasta considerând interpretarea geometrică a ecuației de gradul doi scrisă în forma:

$$x^2 = mx + n \quad (1).$$

Geometric, aceasta înseamnă că încercăm să aflăm punctele de intersecție ale dreptei $y = mx + n$ cu parabola $y = x^2$ (vezi Fig. 1). Se cunoaște că forma soluțiilor ecuației (1) este:

$$x = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2 + n}.$$

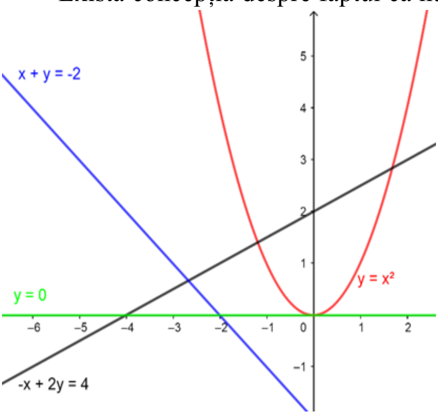


Figura 1

În funcție de valoarea expresiei de sub radical, avem 3 situații:

1) dacă $\frac{1}{4}m^2 + n > 0$, atunci ecuația (1) are 2 soluții disctincte. Geometric, aceasta ne indică faptul că dreapta $y = mx + n$ intersectează parabola $y = x^2$ în două puncte.
2) dacă $\frac{1}{4}m^2 + n = 0$, atunci ecuația (1) are 2 soluții identice. Geometric, aceasta ne indică faptul că dreapta $y = mx + n$ este tangentă parabolei $y = x^2$.

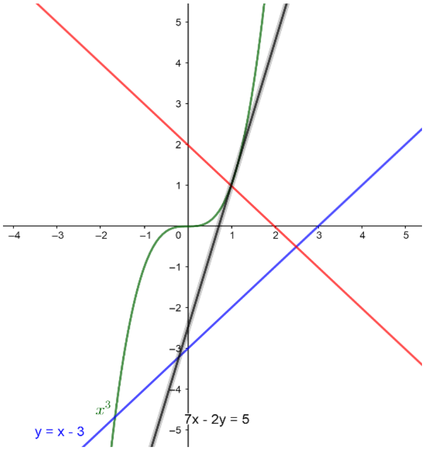


Figura 2

3) dacă $\frac{1}{4}m^2 + n < 0$, atunci ecuația (1) nu are soluții, adică dreapta $y = mx + n$ și parabola $y = x^2$ nu se intersectează.

Situația este simplă și logică și, prin urmare, nu există motive pentru a încerca să se extragă rădăcina pătrată dintr-un număr negativ.

Însă situația se schimbă semnificativ atunci când ne gândim la ecuațiile cubice. Orice ecuație cubică scrisă în forma generală $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ poate fi adusă la forma canonică, realizând substituția $x = y - \frac{b}{3a}$. Obținem ecuația:

$$x^3 = mx + n \quad (2),$$

unde $m = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}$ și $n = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$.

Din punct de vedere geometric, situația este similară cu cea anterioară: căutăm punctul de intersecție a dreptei $y = mx + n$ cu parabola cubică $y = x^3$ (Fig. 2). Diferența esențială față de cazul ecuației pătrate este că, indiferent de dreapta pe care o considerăm, ea intersectează întotdeauna o parabolă cubică. Adică, din motive pur geometrice, ecuația cubică are întotdeauna cel puțin o soluție.

Putem găsi soluțiile ecuației (2) utilizând formula lui Cardano:

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{\frac{n}{2} - \sqrt{Q}} \quad (3),$$

unde $Q = \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{3}\right)^3$. Formula pare a fi simplă, dar conduce la o problemă în cazul când Q este negativ. Este cunoscut exemplul clasic studiat de Bombelli în care se cere să se rezolve ecuația:

$$x^3 = 15x + 4.$$

Aplicând formula (3) obținem că $Q = -121$ și, respectiv,

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Observăm că în forma soluției figurează o expresie negativă sub radical. Ideea lui Raphael Bombelli a fost aceasta: să considerăm, pentru un moment, că rădăcina pătrată a expresiei negative este un număr. Deși se știe că nu există astfel de numere, să admitem totuși că există și că, la fel ca numerele obișnuite, pot fi adăugate la altele, înmulțite, ridicate la o putere etc. Ținând cont de asta, Bombelli a constatat, în particular, că

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1} \text{ și } \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}.$$

Să ne convingem:

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3*2^2*\sqrt{-1} + 3*2*\left(\sqrt{-1}\right)^2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}.$$

La efectuarea calculelor nu s-au aplicat anumite proprietăți ale rădăcinilor pătrate din numere negative, cu excepția ipotezei menționate mai sus precum că acestea se comportă ca numerele obișnuite.

Astfel, se obține soluția $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$, care este corectă și carepoate fi ușor verificată prin înlocuirea directă în ecuația cubică inițială. Acest rezultat a fost o adevărată descoperire, un pas important spre descoperirea planului complex.

Ce sunt de fapt numerele complexe?

Definiție: Vom spune că perechile ordonate de numere (x,y), $x,y \in \mathbb{R}$, sunt numere complexe, dacă pentru aceste numere sunt definite relația de egalitate și operațiile de adunare și înmulțire astfel:

1. Vom spune că 2 numere complexe (x_1,y_1) și (x_2,y_2) sunt egale, dacă și numai dacă $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$.
2. Vom numi sumă a două numere complexe (x_1,y_1) și (x_2,y_2) numărul complex (x_1+x_2, y_1+y_2).
3. Vom numi produsul a două numere complexe (x_1,y_1) și (x_2,y_2) numărul complex $(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$. [1]

Mulțimea numerelor complexe se notează cu $\mathbb{C}$. Numărul complex (0,1) se numește unitate imaginară și se notează cu i. Numerele complexe pot fi înscrise în câteva forme diferite.

Definiție: Forma $x + iy$ a numărului complex $(x,y) \in \mathbb{C}$ se numește formă algebrică de înscriere a numărului complex. [3]

Pentru un număr complex $z = x + iy$ se folosesc următorii termeni:

- ✓ $Re\, z = x$ este partea reală a numărului complex z;
- ✓ $Im\, z = y$ este partea imaginară a numărului complex z;
- ✓ conjugatul numărului complex z notat $\bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}$.

De exemplu, dacă $z_1 = 7 - 2i$ și $z_2 = -5 + 6i$, atunci $\overline{z_1} = 7 + 2i$ și$\overline{z_2} = -5 - 6i$.

Modulul numărului complex z este un număr real nenegativ definit cu ajutorul relației: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

De exemplu, dacă $z_1 = 2 + 3i$ și $z_2 = -5 + 6i$, atunci:

$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$,

$|z_2| = \sqrt{(-5)^2 + 6^2} = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$.

Adunarea și înmulțirea a 2 numere complexe înscrise în formă algebrică se realizează ca și operațiile corespunzătoare dintre 2 binoame, ținând cont de faptul că $i^2 = -1$.

De exemplu, dacă $z_1 = 2 + 3i$ și $z_2 = 5 + 6i$, atunci:

$$z_1 + z_2 = 2 + 3i + 5 + 6i = 7 + 9i,$$
$$z_1 z_2 = (2 + 3i)(5 + 6i) = 10 + 12i + 15i + 18i^2 = 10 + 27i - 18 = -8 + 27i.$$

Unde și cum reprezentăm numerele complexe?

Utilizând definiția numerelor complexe, ne dăm seama că orice număr complex poate fi identificat cu un punct în spațiul $\mathbb{R}^2$ și anume: numărul complex $z = x + iy$ este reprezentat prin punctul cu coordonatele (x, y) și acest punct la fel îl vom nota cu z (Fig. 3). Oricărui punct din plan cu coordonatele (x, y) îi corespunde un număr complex $z = x + iy$ numit afixul punctului respectiv.

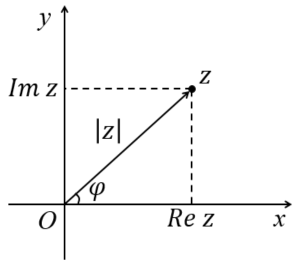


Figura 3

Numerele reale sunt reprezentate pe axa absciselor și de aceea o numim axă reală, iar cele pur imaginare (de forma $z = iy$) – pe axa ordonatelor, din care motiv o numim axă imaginară. Planul, punctele căruia reprezintă numerele complexe, se numește plan complex. [1]

Observăm că numerele complexe pot fi reprezentate și ca vectori cu orginea în $O(0,0)$ și extremitatea în punctul z.

Presupunem că fixăm un număr complex z căruia îi corespunde un punct din plan. Dacă ridicăm numărul complex la pătrat, obținem din nou un număr complex și deci apare un alt punct. Dacă mai ridicăm la pătrat (sau la orice altă putere) rezultatul obținut încă o dată, atunci pe plan apare un nou punct. Apoi repetăm această operație simplă cu numărul complex rezultat de câteva ori. În funcție de numărul inițial fixat, pot exista trei opțiuni. Prima opțiune ar fi că procesul a mers în vrac, adică șirul generat de numere tinde la punctul de la infinit îndepărtându-se brusc de originea planului complex, deci pierzându-se din „câmpul vizual”, și această opțiune nu prezintă interes. Cea de-a doua opțiune este că numărul se micșorează rapid și deci se apropie de origine – cu atât mai puțin interesant. Iar cel mai uimitor lucru este că pentru unele valori inițiale, numerele noi se localizează într-o anumită zonă, iar atunci când sunt reprezentate pe un plan, apar imagini incredibile, aceasta este opțiunea care generează întrebări.

Câte ceva despre mulțimea lui Mandelbrot

Această grupare a numerelor complexe generate prin ridicare la pătrat a fost observată pentru prima dată și descrisă de Julia în 1916. Și aceasta, așa-numita mulțime a lui Julia, a servit ca punct de plecare pentru Benoît Mandelbrot, matematician de la Centrul de Cercetare Thomas Watson, care a propus pentru prima dată termenul „fractal” pentru a descrie obiectele ale căror structură se repetă la micșorarea la scări din ce în ce mai mici. Metoda de a obține această mulțime a lui Mandelbrot este următoarea: Se ia un număr complex. Numărul selectat se ridică la pătrat și la rezultat se adaugă un număr constant. Acest număr constant este de asemenea complex, adică are parte reală și parte imaginară și, alegându-le, putem regla procesul, obținând cele mai bizare imagini. Cea mai simplă formulă iterativă ar fi $z_{k+1} = {z_k}^2 + C$.

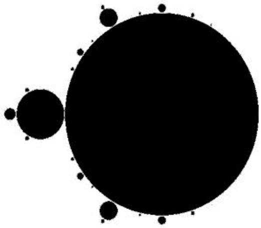
Așadar, mulțimea lui Mandelbrot se definește ca fiind mulțimea acelor puncte c din planul complex pentru care, aplicând în mod repetat polinomul complex $z^2 +$

c (pornind de la $z = 0$), rezultatul rămâne în interiorul unui disc de rază finită (este demonstrat că mulțimea în întregime este amplasată într-un cerc de rază 2).

Cu toate acestea, rămâne întrebarea cum alegem constanta c și valoarea inițială a lui z? Luăm orice punct de pe plan și îl numim c.

Fie $z = 0$. Acum efectuăm următoarea operație recursivă:

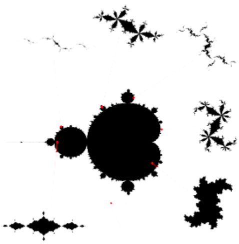
$$z = z^2 + c$$



Dacă modulul lui z nu tinde la infinit, atunci c aparține mulțimii lui Mandelbrot și în imaginea alăturată îl colorăm cu negru.

Pentru unele numere complexe (de exemplu, numărul real 0) este evident că numărul aparține mulțimii. Pentru alte numere (de exemplu, numărul real 1) este evident că nu aparțin acestei mulțimi. Pentru multe alte numere, este necesar să se calculeze doar valorile. Din fericire, dacă după un număr finit de iterații, modulul lui z depășește 2, știm că numărul inițial c nu aparține mulțimii lui Mandelbrot și îl colorăm în alb. Aceasta este varianta clasică de vizualizare a mulțimii, obținută de Mandelbrot în 1980.

Pentru fiecare număr c care nu aparține mulțimii lui Mandelbrot, există un coeficient de „iterații" asociate acestuia, care corespunde numărului de iterații în calcularea z care au avut loc înainte ca modulul lui z să devină mai mare de 2. Mulți specialiști implicați în vizualizarea mulțimii lui Mandelbrot folosesc acest coeficient pentru alegerea culorii punctului corespunzător. Acest lucru duce la faptul că zonele care nu aparțin mulțimii arată extraordinar.



Foarte des, atunci când se dorește vizualizarea superificială a mulțimii, se specifică coeficientul de iterație maximă, de exemplu, 100 sau 1000. Apoi, z se calculează pentru fiecare pixel de un număr necesar de ori, dar nu mai mult de acest maxim dat. Dacă până la acest maxim valoarea lui z își păstrează modulul mai mic decât 2, atunci pixelul este pictat cu negru.

Una dintre caracteristicile curioase și frumoase ale mulțimii lui Mandelbrot este că, indiferent cât de mult mărim scara imaginii, complexitatea acesteia nu se micșorează, iar imaginile obținute sunt fantastice.

Bibliografie:

1. Gașițoi N., *Analiză complexă*, Editura PIM, Iași, 2014. 192 p., ISBN 978-606-13-2095-0
2. ГУСЕВ, В.А., МОРДКОВИЧ, А.Г., *Математика*. Москва: Издательство Просвещение, 1988. 400 p., ISBN 5-09-001292-X
3. BOGDAN, M., *Curs de analiză complexă.* [online] [citat 9 martie 2020]. Disponibil: https://ru.scribd.com/doc/264805904/Analiza-Complexa-Bogdan-Marcel-pdf

Bun de tipar 26. 08. 2020. Garnitura Times New Roman. Comanda nr. 315. Tiraj 70.
Tipografia Universităţii de Stat „Alecu Russo" din Bălţi. mun. Bălţi, str. Puşkin, 38