CZU 517.9

METODE DE INTEGRARE A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE DE ORDIN SUPERIOR

Valeria CRUDU, *studentă,*
Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului,
Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălți
Conducător științific: **Natalia GAȘIȚOI,** *dr., conf. univ.*

Abstract: *The study of differential equations forms the subject of a very important chapter of mathematics. They have many applications in different areas, so we need to know how to solve them. In this paper we will study the higher order ordinary differential equations. We will analyze some methods of integrating these equations and will present various examples.*

Keywords: *differential equation, higher order differential equations differential equation solution, integration methods, quadrature.*

Multe probleme de fizică, geometrie, chimie, tehnică, inginerie cer în formularea lor matematică determinarea unei funcții care, împreună cu derivatele sale, satisface o relație dată. Astfel de relații se numesc *ecuații diferențiale*, întrucât conțin în calitate de necunoscută o funcție, iar ecuația exprimă o dependență dintre funcție și derivatele ei.

Pentru studierea ecuațiilor diferențiale este necesară o clasificare a acestora. Clasificarea uzuală este cea legată de numărul variabilelor de care depinde funcția necunoscută. Dacă funcția necunoscută depinde de o singură variabilă independentă, ecuația diferențială se numește *ecuație diferențială ordinară.* Dacă funcția necunoscută depinde de mai multe variabile independente și în relația respectivă apar și derivatele parțiale ale funcției necunoscute, relația se numește *ecuație cu derivate parțiale.*

În această lucrare vom examina ecuațiile diferențiale ordinare de ordin superior care se rezolvă în cuadraturi. Vom analiza metode de integrare a acestor ecuații și vom exemplifica cu exemple proprii și din alte surse.

Prin *ordinul ecuației* vom înțelege cel mai mare ordin al derivatei funcției necunoscute ce intervine în ecuația diferențială. Ecuația diferențială de ordinul n $(n > 1)$ are forma:

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0,$$

unde x este variabila independentă, $y -$ funcția căutată, iar funcția F este definită pe domeniul $G \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ [1, p. 108], [2, p. 143].

Ecuația

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

cu funcția f definită pe domeniul $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ se numește *ecuație diferențială de ordinul* n *de formă normală* [2, pp.143-145].

Funcția $y = \varphi(x)$ se numește soluție a ecuației diferențiale de ordin superior pe intervalul I_φ, dacă φ este definită pe acest interval cu toate derivatele sale până la ordinul n inclusiv și pentru orice $x \in I_\varphi$ avem $\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\right) \in G$ și $F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0$. Soluția generală a ecuației diferențiale de ordin superior depinde de n parametri $C_1, C_2, \dots, C_n$:

$$y = (x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Astfel, vom avea soluția generală sub formă implicită:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0.$$

Vom numi *soluție parțială a ecuației de ordin superior* orice funcție de forma $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$, obținută din soluția generală $y = (x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, înlocuind în ea $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$ [1, pp. 112-114].

Există anumite ecuații de formă particulară, des întâlnite în aplicații, pentru care s-au găsit metode de rezolvare cu ajutorul cărora soluția se exprimă folosind primitive ale unor funcții. Spunem, în acest caz, că ecuația se rezolvă prin cuadraturi (integrări). În continuare, vom studia tipuri de ecuații de ordinul n rezolvabile în cuadraturi.

Numele de cuadratură provine din faptul că inițial calculul integralei era legat nemijlocit de calculul ariei. Astfel, prin *cuadratură* se înțelege metoda care constă în reducerea rezolvării unei probleme de analiză matematică la calculul unei integrale definite sau nedefinite.

(a) O ecuație de tipul

$$y^{(n)} = f(x)$$

este una din cele mai simple ecuații de ordinul n și se integrează ușor în cuadraturi [2, pp. 157-160].

Într-adevăr, din ecuația dată obținem prin integrări succesive:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1(x - x_0) + C_2, \ldots$$

și în sfârșit,

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)dx + \frac{C_1(x-x_0)^{(n-1)}}{(n-1)!} + \frac{C_2(x-x_0)^{(n-2)}}{(n-2)!} + \cdots + C_{n-1}(x - x_0) + C_n.$$

Exemplul 1. Să se rezolve ecuația $y''' + \sin 5x = \frac{3}{(5x+7)^3}$.

Aducem ecuația la altă formă:

$$y''' = 3(5x+7)^{-3} - \sin 5x.$$

Am obținut o ecuație de ordinul 3 ce se integrează ușor în cuadraturi. Astfel, prin integrări succesive, avem:

$$y'' = \int (3(5x+7)^{-3} - \sin 5x)dx \Rightarrow y'' = -\frac{3}{10}(5x+7)^{-2} + \frac{1}{5}\cos 5x + C_1;$$

$$y' = \int \left(-\frac{3}{10}(5x+7)^{-2} + \frac{1}{5}\cos 5x + C_1\right) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3}{50(5x+7)} + \frac{1}{25}\sin 5x + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{3}{50(5x+7)} + \frac{1}{25}\sin 5x + C_1 x + C_2\right) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{250}\ln|5x+7| - \frac{1}{125}\cos 5x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Deci, am obținut soluția generală a ecuației diferențiale de ordinul 3 cu trei constante arbitrare.

Exemplul 2. Să se afle soluția ecuației $y'' = xe^x$ care satisface condițiile $y(0) = y'(0) = 0$ [4, p. 112].

În această ecuație sunt date condițiile inițiale. Deci, vom obține o soluție particulară a ecuației date. Astfel, avem:

$$y' = \int xe^x dx \Rightarrow y' = xe^x - e^x + C_1;$$

$$y = \int (xe^x - e^x + C_1)dx \Rightarrow y = xe^x - 2e^x + C_1 x + C_2 \Leftrightarrow y$$
$$= e^x(x-2) + C_1 x + +C_2.$$

Utilizăm condițiile inițiale și obținem:

$$y(0) = y'(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Prin urmare, soluția particulară a ecuației este:

$$y = e^x(x-2) + x + 2.$$

(b) O ecuație de tipul

$$F\left(y^{(n)}, y^{(n-1)}\right) = 0$$

se reduce la cuadraturi pentru orice număr natural n.

Inițial, presupunem că ecuația dată este rezolvată în raport cu $y^{(n)}$, atunci $y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right)$. Introducem o funcție nouă z prin relația $z = y^{(n-1)}$. Astfel, ecuația dată capătă forma: $z' = f(z)$. Separăm variabilele și obținem integrala generală a ecuației:

$$\int \frac{dz}{f(z)} = x + C_1.$$

Admitem că ecuația este rezolvată în raport cu z:

$$z = \psi(x, C_1).$$

Revenind la $y^{(n-1)}$, obținem o ecuație de ordinul $(n-1)$:

$$y^{(n-1)} = \psi(x, C_1),$$

soluția căreia se determină prin integrări succesive.

Dacă ecuația inițială nu este rezolvabilă în funcții elementare în raport cu $y^{(n)}$, însă avem $y^{(n)}$ și $y^{(n-1)}$ exprimate prin parametrul t:

$$y^{(n)} = \varphi(t), y^{(n-1)} = \psi(t),$$

atunci relația $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$ ne dă $dx = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)}$, de unde x se obține printr-o cuadratură:

$$x = \int \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)} + C_1.$$

După aceasta găsim consecutiv:

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \frac{\psi(t)\psi'(t)}{\varphi(t)}dt,$$
$$y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(t)\psi'(t)}{\varphi(t)}dt + C_2,$$
$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}dx, \dots, dy = y'dx$$

și în sfârșit,

$$y = \int y'dx + C_n,$$

adică obținem din nou reprezentarea lui y și x în funcție de parametrul t și n constante arbitrare $C_1, C_2, \dots, C_n$, prin urmare, obținem soluția generală.

Exemplul 3. Să se rezolve ecuația $y''' + (y')^2 = 0$ [4, p.112].
Observăm că ecuația nu conține funcția căutată y și variabila independentă x, deci, notăm: $y'' = z$ și obținem:

$$z' = -z^2.$$

Avem o ecuație diferențială de ordinul întâi cu variabile separabile:

$$\frac{dz}{dx} = -z^2 \Rightarrow \frac{1}{z} = x + C_1.$$

În continuare, revenim la y'' și obținem o ecuație de ordinul doi:

$$\frac{1}{y''} = x + C_1 \Leftrightarrow y'' = \frac{1}{x + C_1}.$$

Prin integrări succesive, obținem:

$$y' = \int \left(\frac{1}{x + C_1}\right) dx \Rightarrow y' = \ln|x + C_1| + C_2,$$

$$y = \int (\ln|x + C_1| + C_2) dx \Rightarrow y = \int (\ln|x + C_1|) dx + \int C_2 dx.$$

Calculăm prima integrală prin părți și obținem:

$$y = (x + C_1)(\ln|x + C_1| - 1) + C_2 x + C_3 \Leftrightarrow y = (x + C_1)\ln|x + C_1| + C_2 x + C_3.$$

Exemplul 4. Să se rezolve ecuația $3y'' = (1 + (y')^2)^{3/2}$ [4, p.112].

Punem $y' = z$ și obținem o ecuație de ordinul întâi:

$$3\frac{dz}{dx} = \left(\sqrt{1 + z^2}\right)^3 \text{sau } dx = \frac{3dz}{(1+z^2)^{3/2}},$$

de unde

$$x - C_1 = 3\frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}.$$

În continuare este mai comod să integrăm sub formă parametrică:

$$z = y' = \operatorname{tg}\varphi\,, x - C_1 = 3\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + (\operatorname{tg}\varphi)^2}} = 3\sin\varphi.$$

De aici găsim:

$$dy = y'dx = 3\operatorname{tg}\varphi\cos\varphi d\varphi = 3\sin\varphi d\varphi, y = 3\cos\varphi + C_2.$$

Eliminând parametrul φ, obținem integral generală:

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 9.$$

(c) O ecuație de tipul

$$F\left(y^{(n)}, y^{(n-2)}\right) = 0$$

se integrează de asemenea în cuadraturi. În acest caz, vom introduce o variabilă nouă $z = y^{(n-2)}$, care reduce ecuația dată la o ecuație de ordinul al doilea:

$$F(z'', z) = 0.$$

Dacă ecuația respectivă este rezolvată în raport cu z'', adică are forma $z'' = f(z)$, atunci una din metodele de integrare este următoarea: înmulțind ambele părți ale ecuației cu $2z'$, obținem: $2z'z'' = 2f(z)z'$ sau $d\left(z'^2\right) = 2f(z)dz$, de unde

$$z'^2 = 2\int f(z)dz + C_1.$$

Rezolvăm ultima ecuație în raport cu derivata și separăm variabilele:

$$\frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} = dx,$$

de unde găsim integrala generală a ecuației date:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} = x + C_2.$$

După înlocuirea lui z prin $y^{(n-2)}$ această integrală capătă forma:

$$\Phi\left(y^{(n-2)}, x, C_1, C_2\right) = 0,$$

adică obținem, o ecuație care se integrează în cuadraturi.

Exemplul 5. Să se rezolve ecuația $9y^{IV} = y''$ [43, p.78].

Observăm că ecuația nu conține funcția căutată y, derivata funcției și variabila independentă x, deci, notăm: $y'' = z$ și obținem:

$$9z'' = z.$$

Avem o ecuație în raport cu z''. Conform teoriei expuse, înmulțim ambele părți cu $2z'$, de unde:

$$18z'z'' = 2zz' \text{ sau } 18z'dz' = 2zdz.$$

Integrând, aflăm:

$$9z'^2 = z^2 + C_1,$$

iar

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 + C_1}} = \frac{dx}{3}.$$

Avem o ecuație cu variabilele separate, de unde:

$\ln\left(z + \sqrt{z^2 + C_1}\right) = \frac{x}{3} + \ln C_2$ sau, prin exponențiere $z + \sqrt{z^2 + C_1} = C_2 e^{x/3}$.

Ultima ecuație poate fi transcrisă astfel:

$$\frac{1}{z + \sqrt{z^2 + C_1}} = \frac{1}{C_2} e^{-x/3}.$$

Raționalizăm numitorul în partea stângă și înmulțim ambele părți cu $-C_1$ și obținem:

$$\frac{z - \sqrt{z^2 + C_1}}{\left(z + \sqrt{z^2 + C_1}\right)\left(z - \sqrt{z^2 + C_1}\right)} = \frac{1}{C_2} e^{-x/3} \Leftrightarrow z - \sqrt{z^2 + C_1} = -\frac{C_1}{C_2} e^{-x/3}.$$

Adunăm această ecuație cu cea inițială, împărțim la 2 și obținem:

$$z = \frac{C_2}{2} e^{x/3} - \frac{C_1}{C_2} e^{-x/3}.$$

Revenim la y'' și integrând de două ori, aflăm:

$$y = Ae^{x/3} + Be^{-x/3} + Cx + D,$$

unde A, B, C, D.

Ecuațiile diferențiale de ordin superior au diverse aplicații în diferite domenii. De exemplu, în fizică prin ecuații diferențiale de ordinul doi se exprimă ecuația oscilatorului armonic, ecuația pendulului gravitațional etc. Din aceste considerente, este foarte importantă studierea metodelor de rezolvare a acestor ecuații.

Bibliografie:

1. MOROȘANU, G. *Ecuații diferențiale. Aplicații*. București: Ed. ARSR, 1989
2. STEPANOV, V. V. *Curs de ecuații diferențiale*. București: Ed. Tehnică, 1995
3. ФИЛИППОВ, А. Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*. Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика”, 2000
4. КРАСНОВ, М. Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения (задачи и примеры с подробными решениями)*. Москва: УРСС, 2002