CZU 51(072.3)

ECUAȚII CU MODUL ÎN CURSUL PREUNIVERSITAR DE MATEMATICĂ

Irina ANDRIUȚA, *studentă,*
Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului,

Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălți
Conducător științific: **Liubov ZASTÎNCEANU,** *dr., conf. univ.*

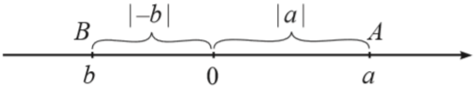
Abstract: *This article examines how to solve equations with the module. The most difficult tasks of school mathematics are the equations containing variables under the module's sign. In order to successfully solve these equations, it is necessary to know the definition and basic properties of the module. When solving equations containing modules, the main concern is to remove the modules and thus obtain an algebraic equation. We can remove the module of an algebraic expression if we know the sign of expression, which is not always simple, sometimes requiring many calculations. Naturally, students should have the skills to solve such equations.*

Keywords: *module, absolute value, equation with one unknown, first degree equation with unknown, second degree equation with unknown.*

Scurt istoric: Noțiunea de modul sau valoare absolută a fost introdusă în matematica teoretică relativ târziu: în Franța în 1806, Jean Robert Argrand a folosit noțiunea de modul ca unitate de măsură. Notația obișnuită acum pentru modul a fost introdusă de Karl Weierstrass în 1841.

Noțiuni-cheie

Definiție. Distanţa de la originea de coordonate O până la punctul A*(a),a*$\in$*Z (Q, R)* se numeşte **modulul sau valoarea absolută** a numărului *a* şi se notează |*a*|. [1, p. 40]



De aici rezultă că modulul oricărui număr *a* este un număr nenegativ.

$$|a| = \begin{cases} a \ , a \geq 0, \\ -a \ , a < 0. \end{cases}$$

Generalizări ale modulului sunt folosite în multe contexte matematice diferite. Există modul definit pentru grupuri, numere complexe, spații vectoriale. Noțiunea de modul este strâns legată de cele de magnitudine, distanță sau normă în diferite contexte matematice sau fizice.

Definiție. O propoziție cu o variabilă, în care apare o singură data semnul „=”, se numește **ecuație cu o singură necunoscută.** [5, p. 21]

Definiție. Ecuația de forma $ax + b = 0,\ a, b \in R,\ a \neq 0,$ se numește **ecuație de gradul I cu o necunoscută.** [2, p. 70]

Definiție. Ecuația de forma $ax^2 + bx + c = 0,$ unde $a \neq 0,\ a, b, c \in R,$ se numește **ecuație de gradul II cu o necunoscută.** [2, p. 86]

Proprietăţile modulului

1. $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{Z};$
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \forall a, b \in \mathbb{Z};$

3. $|a| = |-a|, \forall a \in \mathbb{Z};$
4. $|a-b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|, \forall a, b \in \mathbb{Z};$
5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \forall a, b \in \mathbb{Z};$
6. $|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a, a > 0$
7. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, a > 0$
8. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ sau $x \geq a, a > 0$

Primele ecuaţii cu modul se rezolvă în clasa a VIII-a şi se reduc, prin explicitarea modulului la ecuaţii liniare.

Exemplu 1 [5, p.15]: Rezolvaţi ecuaţia $|3x-7| = 5$

Folosindu-ne de proprietatea modulului știm că:

$|3x-7| = 5 \Leftrightarrow 3x-7 = 5$ *sau* $3x-7 = -5$

Rezolvăm fiecare ecuație aparte:

$3x-7=5$ $\quad$ $3x-7=-5$

$3x=5+7$ $\quad$ $3x=-5+7$

$3x=12$ $\quad$ $3x=2$

$x=4$ $\quad$ $x=\frac{2}{3}$

Mulțimea soluțiilor ecuației cu modul este S = $\left\{\frac{2}{3};4\right\}$

Exemplu 2: [2, p. 68]: Rezolvaţi ecuaţia $|2x-3| = 7$

Folosindu-ne de proprietatea modulului, știm că:

$|2x-3| = 7 \Leftrightarrow 2x-3=7 \quad sau \quad 2x-3=-7$

Rezolvăm fiecare ecuație aparte:

$2x-3=7$ $\quad$ $2x-3=-7$

$2x=7+3$ $\quad$ $2x=-7+3$

$2x=10$ $\quad$ $2x=-4$

$x=5$ $\quad$ $x=-2$

Mulțimea soluțiilor ecuației cu modul este S = {-2;5}

Mai frecvent ecuații cu modul se întâlnesc în clasa a X-a. Aici apare o subtemă numită, *Ecuații ce conțin necunoscuta în modul*. Există câteva metode de rezolvare a ecuațiilor ce conțin necunoscuta în modul.

În continuare voi reprezenta aceste metode de rezolvare:

1. **Aplicarea definiției modulului**

Exemplu 3: [3, p.119]: Să se rezolve în R ecuația $|x-8| = 2$

Folosindu-ne de proprietatea modulului, știm că:

$$|x-8|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-8=2 \\ x-8=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=6 \end{array}\right.$$

Mulțimea soluțiilor ecuației cu modul este S = {6;10}

Exemplu 4: [3, p. 119] Să se rezolve în R ecuația $|3x+1|=-5$

Observație: Un modul nu poate să fie egal cu un număr negativ.

$|3x+1|=-5 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Mulțimea soluțiilor ecuației cu modul este S = Ø

2. **Aplicarea relației** $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right.$

Exemplu 5: [3, p. 119]: Să se rezolve în R ecuația $|x+2|=|x-3|$

$$|x+2|=|x-3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=x-3 \\ x+2=-x+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-x=-5 \\ 2x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \mathrm{O} \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

În prima ecuație avem x este egal cu Ø, deci avem la răspuns doar o singură soluție.

Mulțimea soluțiilor ecuației cu modul este S = $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

3. **Metoda intervalelor**

Exemplu 6: [3, p. 119]: Să se rezolve în R ecuația $|x-1|-3|x+1|=x$

Pentru a rezolva ecuația cu module, în acest caz vom aplica metoda intervalelor construind tabelul semnelor pentru fiecare expresie din modul.

Egalăm fiecare expresie din modul cu 0 și aflăm rădăcinile:

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

Construim tabelul de semne:

x	$x<-1$	$-1 \le x < 1$	$x \ge 1$
$x-1$	-	-	+
$x+1$	-	+	+

Avem cazurile:

I. Pentru $x \in (-\infty;-1)$

$$-(x-1)-3(-(x+1))=x \Leftrightarrow -x+1+3x+4=x \Leftrightarrow 2x+4=x \Leftrightarrow x=-4$$

Verificăm dacă soluția $x=-4$ aparține intervalului (-∞;-1) pe care este definită ecuația $-4 \in (-\infty;-1) \Rightarrow x=-4$ este soluția în acest caz.

II. Pentru $x \in [-1;1)$

$$-(x-1)-3(x+1)=x \Leftrightarrow -x+1-3x-3=x \Leftrightarrow -4x-2=x \Leftrightarrow -5x=2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{5}$$

Verificăm dacă soluția $x=-\frac{2}{5}$ aparține intervalului $[-1;1)$ pe care este definită ecuația $-\frac{2}{5}\in[-1;1) \Rightarrow x=-\frac{2}{5}$

III. Pentru $x\in[1;+\infty)$

$$x-1-3(x+1)=x \Leftrightarrow -2x-4=x \Leftrightarrow -3x=4 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}$$

Verificăm dacă soluția $x=-\frac{4}{3}$ aparține intervalului $[1;+\infty)$ pe care este definită ecuația $-\frac{4}{3}\notin[1;+\infty) \Rightarrow x=-\frac{4}{3}$ nu este soluție în acest caz.

S = $\left\{-4;-\frac{2}{5}\right\}$

Exemplu 7: Să se rezolve în R ecuația $|x|+|x-1|+|x-2|=6$

Pentru a rezolva ecuația cu module, în acest caz vom aplica metoda intervalelor construind tabelul semnelor pentru fiecare expresie din modul.

Egalăm fiecare expresie din modul cu 0 și aflăm rădăcinile:

$x=0$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

Construim tabelul de semne:

	$x<0$	$0\le x<1$	$1\le x<2$	$x\ge 2$
x	-	+	+	+
$x-1$	-	-	+	+
$x-2$	-	-	-	+

Avem cazurile:

I. Pentru $x\in(-\infty;0)$

$$-x+[-(x-1)]+[-(x-2)]=6 \Rightarrow -x-x+1-x+2=6 \Rightarrow -3x+3=6 \Rightarrow -3x=3 \Rightarrow x=-1$$

Verificăm dacă soluția $x=-1$; aparține intervalului (-∞;0) pe care este definită ecuația: $-1\in(-\infty;0) \Rightarrow x=-1$ este soluție în acest caz.

II. Pentru $x\in[0;1)$

$$x+[-(x-1)]+[-(x-2)]=6 \Rightarrow x-x+1-x+2=6 \Rightarrow -x+3=6 \Rightarrow -x=3 \Rightarrow x=-3$$

Verificăm dacă soluția $x=-3$ aparține intervalului $[0;1)$ pe care este definită ecuația: $-3\notin[0;1) \Rightarrow x=-3$ nu este soluție în acest caz.

III. Pentru $x\in[1;2)$

$x+x-1+[-(x-2)]=6 \Rightarrow x+x-1-x+2=6 \Rightarrow x+1=6 \Rightarrow x=5$

Verificăm dacă soluția $x=5$ aparține intervalului $[1;2)$ pe care este definită ecuația:

$5 \notin [1;2) \Rightarrow x=5$ nu este soluție în acest caz.

IV. Pentru $x \in [2;+\infty)$

$x+x-1+x-2=6 \Rightarrow 3x-3=6 \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3$

Verificăm dacă soluția $x=3$ aparține intervalului $[2;+\infty)$ pe care este definită ecuația:

$3 \in [2;+\infty) \Rightarrow x=3$ este soluție în acest caz.

S = {-1;3}

4. **Utilizarea necunoscutei auxiliare**

Exemplu 8: [3, p. 119] Să se rezolve în R ecuația $2x^2-|x|-1=0$

DVA: $x \in R$. Fie $|x|=t,\ t \geq 0$. Cunoaștem că $x^2=|x|^2$, atunci obținem ecuația $2t^2-t-1=0$

Rezolvăm ecuația de gradul II și aflăm soluțiile acesteia.

$2t^2-t-1=0$

$\Delta=b^2-4ac=1+8=9$

$$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$t_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+3}{4}=1$$

Revenim la necunoscuta x și obținem: $\left[\begin{array}{l} |x|=1 \\ |x|=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Răspuns: S = {-1, 1}

5. **Metoda grafică**

Exemplu 9: [3, p. 119] Să se determine punctele de extrem local și extremele locale ale funcției $f:R \rightarrow R$: $f(x)=|2x^2-3x+1|$

Egalăm ecuația cu 0 și o rezolvăm:

$$\left|2x^2-3x+1\right|=0$$

$$2x^2-3x+1=0$$

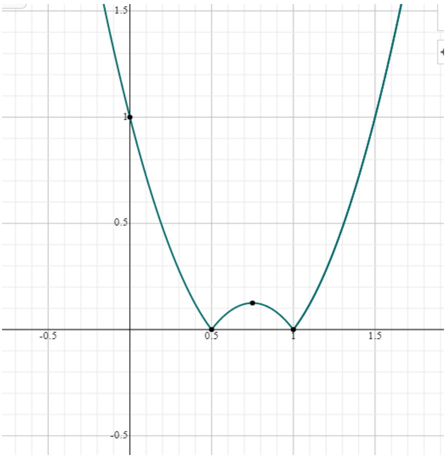
$$\Delta=b^2-4ac=9-8=1$$

$$x_1=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{3+1}{4}=1$$

Soluțiile ecuației sunt: S = $\left\{\frac{1}{2};1\right\}$

Construim graficul funcției $f(x)=\left|2x^2-3x+1\right|$



Exemplu 7: [3, p. 119] Să se rezolve în R ecuația $\left|x^2-5x+4\right|=2$

Avem o ecuație de gradul II, pentru a o rezolva vom proceda în felul următor: Folosindu-ne de proprietatea modulului, știm că:

$$\left|x^2-5x+4\right|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+4=2 \\ x^2-5x+4=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+2=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{array}\right.$$

Rezolvăm fiecare ecuație de gradul II în parte și determinăm soluțiile.

$$x^2-5x+2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=25-8=17$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Mulțimea soluțiilor ecuației cu modul este:

S = $\left\{\frac{5\pm\sqrt{17}}{2};2;3\right\}$

Concluzii: Cercetarea realizată în cadrul acestui articol *Ecuaţii cu modul în cursul preuniversitar de matematică* ne-a permis să identificăm următoarele momente:

- Pentru prima dată noţiunea de modul se studiază în clasa a VI-a, fiind introdusă ca distanţa dintre un punct pe axă, ce indică numărul întreg şi originea de coordonate.
- Ecuațiile cu modul apar în clasa a VIII-a şi se reduc, prin explicitarea modulului la ecuaţii liniare.
- Mai detaliat se studiază în clasa a X-a. Aici apare subtema *Ecuații ce conțin o necunoscută în modul* și se studiază metodele de rezolvare a acestor ecuații.

Bibliografie:

1. ACHIRI, I., BRAICOV, A., ȘPUNTENCO, O. *Matematica*. Manual pentru clasa a VI-a. Chișinău: Prut Internațional, 2017. 244 p. ISBN 978-9975-54-300-2
2. ACHIRI, I., BRAICOV, A., ȘPUNTENCO, O. *Matematica*. Manual pentru clasa a VIII-a. Chișinău: Prut Internațional, 2013. 244 p. ISBN-978-9975-54-107-7
3. ACHIRI, I., BRAICOV, A., ȘPUNTENCO, O. *Matematica*. Manual pentru clasa a X-a. Chișinău:Prut Internațional, 2012. 282 p. ISBN 978-9975-54-043-8
4. ACHIRI, I., BRAICOV, A., ȘPUNTENCO, O. *Matematica*. Manual pentru clasa a XI-a. Chișinău: Prut Internațional, 2014. 304 p. ISBN 978-9975-54-145-9
5. IAVORSCHI, V. *Materiale recapitulative la matematică,* Chișinău: Lyceum, 2003. 132 p. ISBN 9975-9672-8-0