CZU 512

SISTEME DE ÇONGRUENȚE LINIARE DE O VARIABILĂ

Tatiana ROTARI
asistent universitar
Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălți

***A**bstract.* In the article is studies .

Noţiunea de sistem de congruenţe liniare de o variabilă este o noţiune fundamentală studiată în cursul de Algebră şi teorie a numerelor în cadrul programului de studii a specialităţii Matematică şi Informatică. Una dintre problemele fundamentale ace au condus la studiul sistemelor de congruenţe liniare de o variabilă a fost calculul datei zilei de Paşte.

Conform [1], în anul 325 d. Hr. în cadrul primului conciliu ecumenic de la Niceea, s-a stabilit ca data zilei de Paşte să fie stabilită atfel: prima lună plină de după echinocţiul de primăvară.

Este evident că în fiecare data primei lune pline după echinocţiu de primăvară se modifică, de aceea a aparut necesitatea stabilirii unei relaţii prin intermediul căreia s-ar putea determina data zilei de Paşte, ţinând cont de numărul de zile din an şi de perioadele apariţiei lunei pline.

Această relaţi a fost stabilită de către Gauss, care afirma că pentru a determina data zilei de Paşte se utilizează relaţia: fie N anul corespunzător.

1. Se determină numerele a, b, c, rezolvând congruenţele numerice
$$\begin{cases} N & \equiv & a \pmod{19} \\ N & \equiv & b \pmod{4} \\ N & \equiv & c \pmod{7} \end{cases}$$
2. De determinăm numărul d, rezolvând congruenţa
$$19a + 15 \equiv d \pmod{30}$$
3. Se rezolvăm congruenţa
$$2b + 4c + 6d + 6 \equiv s \pmod{7}$$
4. Se determină numărul
$$k = 4 + d + s.$$
Dacă $k \leqslant 30$, atunci data zilei de Paşti este k aprilie. Dacă $k > 30$, atunci data zilei de Paşti este $k - 30$ mai.

Ţinînd cont de faptul că numere d şi s sunt clase de rsturi, avem că $0 \leqslant d < 30$ şi $0 \leqslant s < 7$. Atunci data timpurie a zilei de Paşti se obţine pentru $d = s = 0$, adică pe 4 aprilie, iar cea mai tîrzie dată a zilei de Paşti este pentru $d = 29$, $s = 6$. Atunci $k = 4 + 29 + 6 = 39 > 30$. Data zilei de Paşti este 9 mai.

Sistemul de forma
$$\begin{cases} a_1x & \equiv & b_1 \pmod{m_1} \\ a_2x & \equiv & b_2 \pmod{m_2} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_nx & \equiv & b_n \pmod{m_n},\ (m_i,\, m_j) = 1,\ i \neq j \end{cases} \tag{1}$$
se numeşte sistem de congruenţe liniare.

Rezolvînd fiecare congruenţă a sistemului (1), obţinem:

$$\begin{cases} x & \equiv & c_1 \pmod{m_1} \\ x & \equiv & c_2 \pmod{m_2} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ x & \equiv & c_n \pmod{m_n},\ (m_i,\, m_j) = 1,\ i \neq j \end{cases} \tag{2}$$

În continuare este necesar de determinat acele valori ale variabilei x ce satisface concomitent congruenţele (**??**).

Pentru a determina aceste valori, se procedează astfel:

1. se determină soluţia primei congruenţe
$$x = c_1 + m_1 t_1,\ t_1 \in \mathbb{Z}; \tag{3}$$
2. se substituie soluţia (3) în congruenţa a doua:
$$c_1 + m_1 t_1 \equiv c_2 \pmod{m_2}$$
sau
$$m_1 t_1 \equiv d_1 \pmod{m_2}.$$
Deoarece $(m_i,\, m_j) = 1,\ i \neq j$, ultima congruenţă admite soluţie unică. Fie că această soluţie este
$$t_1 = d_1 + m_2 t_2. \tag{4}$$
3. se substituie relaţia (4) în relaţia (3) şi se determină o nouă formă a variabilei x.
$$x = d_2 + m_1 m_2 t_2,\ t_2 \in \mathbb{Z}.$$
4. se substituie valoarea nouă a variabilei x în următoarea congruenţă.
5. Continuînd procedeul descris, din ultima congruenţă de determină soluţia sistemului de congruenţe de forma:
$$x = d_k + m_1 m_2 \dots m_k t,\ t \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Exemplu. Să se reolve sistemul de congruenţe liniare

$$\begin{cases} x & \equiv & 1 \pmod{11} \\ x & \equiv & 3 \pmod{7} \\ x & \equiv & 6 \pmod{5} \end{cases}$$

*S*oluţie. Rezolvăm prima congruenţă

$$x \equiv 1 \pmod{11} \Leftrightarrow x = 1 + 11t_1,\ t_1 \in \mathbb{Z}.$$

Substituim soluţia obţinută în cea de-a doua congruenţă

$$1 + 11t_1 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$11t_1 \equiv 2 \pmod{7} \Leftrightarrow t_1 \equiv 4 \pmod{7} \Leftrightarrow t_1 = 4 + 7t_2,\ t_2 \in \mathbb{Z}.$$

Substituim valoarea lui t_1 în expresia lui x, apoi valoarea nouă substituim în ce-a de-a treia congruenţă

$$x = 45 + 77t_2,\ t_2 \in \mathbb{Z}$$

$$45 + 77t_2 \equiv 6 \pmod{5} \Leftrightarrow 2t_2 \equiv 6 \pmod{5} \Leftrightarrow t_2 = 3 + 5t,\ t \in \mathbb{Z}.$$

Determinăm acum soluţia sistemului

$$x = 45 + 77(3 + 5t) = 276 + 385t,\ t \in \mathbb{Z}$$

Răspuns. $S = \{276 + 385t |\, t \in \mathbb{Z}\}$

O altă metodă de rezolvarea a sistemelor de congruenţe liniare de o variabilă este redată de următoarea:

Teoremă. Dacă numerele M_s şi q_s, unde $s = \overline{1, k}$ sunt numere determinate astfel încît $m_s M_s = m_1 m_2 \ldots m_k$ şi $M_s q_s \equiv 1 \pmod{m_s}$, atunci soluţia sistemului de congruenţe este

$$x \equiv x_0 \pmod{m_1 m_2 \ldots_s}, \tag{6}$$

unde $x_0 = M_1 q_1 c_1 + M_2 q_2 c_2 + \ldots + M_k q_k c_k$.

Exemplu. Rezolvaţi sistemul de congruenţe

$$\begin{cases} x & \equiv & 1 \pmod{11} \\ x & \equiv & 3 \pmod{7} \\ x & \equiv & 6 \pmod{5} \end{cases}$$

Soluţie. În acest sistem avem $m_1 = 11$, $m_2 = 7$, $m_3 = 5$, $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_3 = 6$. Deoarece

$$m_s \cdot M_s = 11 \cdot 7 \cdot 5,$$

obţinem că $M_1 = 35$, $M_2 = 55$, $M_3 = 77$. Determinăm numerele q_s ce satisfac relaţia $M_s \cdot q_s \equiv 1 \pmod{m_s}$. În rezultat obţinem $q_1 \equiv 6 \pmod{11}$, $q_2 \equiv 6 \pmod{7}$, $q_3 \equiv 3 \pmod{5}$.

Determinăm valoarea lui x din dultima teoremă

$$x_0 = 35 \cdot 6 \cdot 1 + 66 \cdot 6 \cdot 3 + 77 \cdot 3 \cdot 6 = 2586.$$

Atunci

$$x \equiv 2586 \pmod{11 \cdot 7 \cdot 5}$$

sau

$$x \equiv 276 \pmod{385}.$$

Astfel, soluţia sistemului de congruenţe liniare este $S = \{276 + 385t | \, t \in \mathbb{Z}\}$

Bibliografie.

1. STEIN, William. *Elementary Number Theory: Primes, Congruences, and Secrets.* Acces liber la adresa web: http://wstein.org/ent/ent.pdf
2. VOLCOV, N. F.*Elemente de teorie a numerelor.* Chişinău, Ed. Şcoala Sovietică, 1958.
3. https://www.timpul.md/articol/cum-se-calculeaza-data-pastelui-8797.html
4. http://webserv.lgrcat.ro/Sitevechi/Astronomie/Articole/Paste.htm