CZU 517.5

ASPECTE PRIVIND ÎNVĂȚAREA BAZATĂ PE PROIECTE ÎN CADRUL UNITĂȚII DE CURS ANALIZĂ COMPLEXĂ

Natalia GAȘIȚOI,
Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălți

Procesul instructiv contemporan în instituțiile de învățământ superior solicită cadrului didactic schimbarea strategiei de predare, transformarea lui într-un ghid sau trainer al studentului, iar sala de curs trebuie să fie transformată într-un mediu de lucru colaborativ în care studentul dezvoltă competențele sale de explorare, învață să formuleze întrebări esențiale, constructive, „bune”. Investigarea problemelor de analiză complexă permit înțelegerea profundă și autentică a conceptelor de analiză reală, iar succesul poate fi obținut aplicând învățarea bazată pe proiecte realizând o sinteză a rezultatelor din algebră, trigonometrie, analiză reală, geometrie și topologie.

Cuvinte-cheie: învățarea bazată pe proiecte, metode interactive, numere complexe, funcții elementare de variabilă complexă, transformări conforme.

Contemporary instructional process in higher education institutions requires the teacher to change his teaching strategy, transforming him into a student's guide or trainer, and in the same time the classroom should be transformed into a collaborative work environment in which the student develops his exploration skills, learn to formulate essential, constructive, "good" questions. The investigation of complex analysis problems allows a deep and authentic understanding of real analysis concepts, and the success can be achieved by implementing project-based learning by synthesizing results from algebra, trigonometry, real analysis, geometry and topology.

Keywords: project-based learning, interactive methods, complex numbers, elementary complex variable functions, conformal mappings.

Sistemul educațional este în continuă schimbare, reformele fiind orientate spre oferirea elevilor a unei educații de care au nevoie: centrată pe elev, adaptată la nevoile lui, la particularitățile individuale și orientată spre comunitate.

Un profesor de matematică trebuie nu doar să fie capabil să explice materia școlară elevilor cu diferite nivele de pregătire, dar ce este extrem de important – să-i inspire să învețe. Pentru aceasta el însuși ar trebui să-și dezvolte un anumit nivel de cultură matematică, astfel încât să simtă necesitatea de a reflecta asupra întrebărilor de genul:

- Care au fost premisele de apariție ale unui concept sau teoreme?
- De unde provine conceptul sau teorema studiată?
- De ce ar trebui să cunoaștem acest concept sau teoremă?
- Unde putem aplica acest concept sau teoremă?

Profesorul școlar de matematică nu va reuși să cultive elevilor dragostea și interesul pentru matematică, dacă încă din perioada de formare inițială el însuși nu va simți importanța temelor pe care le explică, dacă nu va reuși să vadă frumosul în formulele pe care le discută cu elevii, dacă nu va înțelege pe deplin conținuturile matematice, dacă nu i se va aprinde pasiunea, admirația, interesul și entuziasmul pentru ceea ce predă.

În acest context remarcăm importanța studierii bazelor Analizei complexe, întrucât înțelegerea completă a unor concepte din analiza reală este posibilă doar analizându-le din perspectiva extinderii la mulțimea numerelor complexe.

Abordarea comparativă a conținuturilor teoretice în cadrul unității de curs Analiză complexă poate fi realizată prin metoda proiectului, învățarea bazată pe proiecte fiind o metodă de predare sistematică care angajează studenții într-un proces de cercetare structurat în jurul întrebărilor autentice și complexe. În procesul de formare inițială a viitorilor profesori de matematică, în cadrul unității de curs Analiză complexă le putem propune studenților realizarea unui proiect cu tema „Ce este un număr?". Scopul acestuia este investigarea evoluției diferitor sisteme numerice și a evoluției concepției oamenilor referitoare la ce este un număr. Abordând acest studiu prin prisma instruirii adaptive, prezentarea acestui proiect ar putea avea diferite forme, în dependență de particularitățile individuale ale studentului, în dependență de stilul lui de învățare și anume: o prezentare PowerPoint, un referat, un articol, un ziar de perete, un filmuleț video, o înregistrare audio etc.

Unii studenți ar putea fi stresați de la descoperirea faptului că originea apariției numerelor complexe se află în încercarea de a rezolva ecuații cubice și nu pătratice, așa cum se consideră generic.

În anul 1545 Girolamo Cardano, în lucrarea sa Ars Magna, pentru prima dată în istorie, notează explicit rădăcina pătrată dintr-un număr negativ, prezentând soluția ecuației de gradul trei de forma $ax^3 + ax + b = 0$, precum și a problemei de aflare a două numere care fiind adunate ar avea suma 10, iar produsul lor fiind 40. Cardano indică soluția pentru sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x + y &= 10 \\ xy &= 40 \end{cases}$$

în forma $x = 5 - \sqrt{-15}$ și $y = 5 + \sqrt{-15}$. Mai târziu, în 1572, Rafaello Bombelli a definit numărul imaginar i, ca răspuns la întrebarea: „Care este rădăcina pătrată din minus unu?".

În secolul al XVII-lea, Gottfried Leibniz scria „numerele imaginare sunt o găselniță perfectă şi minunată a spiritului divin, aproape de amfibie între ființă și neființă".

În secolul al XVIII-lea numerele complexe deja erau aplicate pe larg, de exemplu Johann Lampert le utiliza pentru aplicațiile de proiecție, Jean D'Alembert le aplica în hidrodinamică, iar Euler, D'Alembert și Lagrange le-au aplicat în demonstrațiile incorecte ale teoremei fundamentale a algebrei.

Pentru a avea o înțelegere clară despre unele rezultate din analiza reală, acestea ar trebui examinate în diferite contexte și forme. Morris Kleine, în 1972, în lucrarea [1], scria că „cea mai scurtă cale dintre două adevăruri în domeniu real trece prin domeniul complex".

În manualul de matematică pentru clasa a XI-a [2] se menționează că în secolul al XVIII-lea Leonard Euler a introdus notația$\sqrt{-1} = i$, iar Carl Friedrich Gauss a numit numere de forma $a + bi$, a, $b \in \mathbb{R}$, numere complexe și se formulează definiția „se numește număr complex expresia de forma $a + bi$, unde a, $b \in \mathbb{R}$, iar i este un simbol cu proprietatea $i^2 = -1$".

Considerăm că este important ca profesorul de matematică să cunoască că numerele complexe pot fi privite în diverse forme, ca de exemplu:

1. Perechi ordonate de două numere reale (a, b), a, $b \in R$.
2. Numere de forma $a + bi$, a, $b \in \mathbb{R}$.
3. Numere de forma $\rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, $\rho \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in \mathbb{R}$.
4. Puncte sau vectori pe plan.
5. Operatori (adică rotații ale vectorilor în plan).
6. Matrice de forma:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$
cu a, $b \in \mathbb{R}$.

7. Elemente ale unui corp comutativ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Pentru rezolvarea unor probleme cu numere complexe, în anumite cazuri este mai simplu de aplicat metode geometrice, iar pentru cunoașterea acestora, studenților lise poate propune elaborarea unui proiect cu tema „Interpretarea geometrică a operațiilor cu numere complexe”. Realizarea proiectului va asigura nu doar conexiunea dintre metodele algebrice și cele geometrice de rezolvare a problemelor, dar și va solicita formarea competențelor de utilizare a unor aplicații software pentru matematică (ca de exemplu, Geogebra sau Mathematica). În cadrul acestui proiect studenții ar putea analiza conținutul modulului Numere complexe din manualul de liceu [2] și selecta acele probleme care pot fi rezolvate atât pe cale algebrică cât și pe cale geometrică. De exemplu problema de aflare a numerelor complexe z, care satisfac condițiile Im z=3 și $|z - i| = 2$, poate fi redusă la rezolvarea algebrică a sistemului de ecuații

$$\begin{cases} y & = & 3 \\ \sqrt{x^2 + (y-1)^2} & = & 2, \end{cases}$$

dar poate fi analizată și din punct de vedere geometric ca mulțimea punctelor de intersecție a unei drepte cu un cerc (cu centrul în punctul i de rază 2).

Putem motiva interesul studenților pentru studierea funcțiilor elementare de variabilă complexă, prezentându-le abordările diferite pentru valoarea logaritmului unității imaginare pe care le-au avut Leibniz și Bernoulli, descrise de exemple în [3].

Leibniz afirma că $\log i = 0$, reieșind din faptul că

$$\log(-1)^2 = \log 1^2$$

și cum

$$2\log(-1) = 2\log 1 = 0$$

se deduce că $\log(-1) = 0$. Dar atunci

$$0 = \log(-1) = \log i^2 = 2logi$$

și deci $\log i = 0$.

Bernoulli, pornind de la identitatea lui Euler

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

deduce că $\log(-1) = \pi$ și prin urmare

$$\log 1 = \frac{1}{2}\log(-1) = \frac{\pi i}{2}.$$

Disputa lui Leibniz și Bernoulli referitoare la valoarea logaritmului unității imaginare a fost rezolvată de Leonard Euler.

Elaborarea unui proiect cu tema „Studiul comparativ al funcțiilor elementare de variabilă reală și de variabilă complexă”, este o posibilitate de a trece în revistă principalele proprietăți ale funcțiilor elementare de variabilă reală și cu siguranță va contribui la înțelegerea profundă și explicația conștientă a acestora. Funcțiile elementare de variabilă complexă au unele proprietăți neobișnuite pentru restricțiile lor la axa reală.

Așa de exemplu, pentru funcția de variabilă complexă noțiunea de grafic este irelevantă întrucât reprezintă o mulțime de puncte $G_f = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : z \in D_f, w = f(z)\}$ din $\mathbb{R}^4$ care nu poate fi reprezentată geometric. Studentul trebuie să poată vedea funcțiile elementare de variabilă complexă ca transformări punctuale ale mulțimilor din planul variabilei z în planul variabilei w. De exemplu, imaginea dreptei $y = 1$ din planul variabilei z la transformarea realizată de funcția $f(z) = z^2 + z$

este parabola $u = \dfrac{v^2-5}{4}$, $v \in \mathbb{R}$ [4].

Un specific al Analizei complexe, care o deosebește de Analiza reală, constă în aceea că ea studiază și aplicații multivoce, numite multifuncții, prin care fiecărui punct z din domeniul de definiție al funcției i se pun în corespondență mai multe valori complexe w. Ca de exemplu, funcția $w = \sqrt[n]{z}$ este o funcție multiformă cu n ramuri uniforme.

Funcția exponențială $w = e^z$, $z \in \mathbb{C}$ are aceeași dezvoltare în serie de puteri ca și funcția e^x, $x \in \mathbb{R}$ și se pare că doar formal se înlocuiește x cu z :

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots,\ z \in \mathbb{C}.$$

Mai mult, se păstrează și proprietatea de bază a funcției exponențiale

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^(z_1 + z_2)$$

pentru orice $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$.

Totuși, funcția exponențială de argument complex are unele proprietăți ce ar putea surprinde studentul. De exemplu, nu mai putem vorbi despre monotonia funcției, întrucât numerele complexe în general nu se compară și în plus, ea este o funcție periodică spre deosebire de restricția ei la axa reală care este o funcție pozitivă strict crescătoare. Perioada funcției exponențiale este $T = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ și faptul că aceasta este pur imaginară pentru $k \neq 0$ ne asigură de lipsa contradicțiilor cu cazul real.

Drept consecință, funcția inversă celei exponențiale, adică funcția logaritmică este o funcție multivocă, ceea ce ne vorbește de faptul că nu doar capătă sens logaritmul numerelor negative și al celor complexe, dar și că există o mulțime infinită de valori pentru acestea,

$$Logz = \ln|z| + iArgz = \ln|z| + iargz + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$$

.

Cu toate aceste diferențe semnificative, rămân valabile formulele care exprimă proprietățile fundamentale ale logaritmilor:

$$Logz_1 + Logz_2 = Log(z_1z_2),$$

$$Logz_1 - Logz_2 = Log\frac{z_1}{z_2},$$

pentru orice $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}^*$.

Puterea complexă a oricărui număr complex z se definește prin relația:

$$a^z = e^{zLoga}.$$

Calculul puterilor numerelor complexe, ca de exemplu 1^i, i^i uimesc prin rezultatele ce se obțin:

$$1^i = e^{iLog1} = e^{-2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}$$

și pentru orice valoare întreagă $k \in \mathbb{Z}$.

Dacă vom calcula puterea reală a numărului 1, vom obține:

$$1^\alpha = \cos(2k\pi\alpha) + i\sin(2k\pi\alpha)$$

unica valoare reală obținându-se pentru $k = 0$, iar celelalte valori fiind toate complexe.

Pentru i^i obținem:

$$i^i = e^{iLogi} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi},\ k \in \mathbb{Z},$$

care este reală pentru orice valoare $k \in \mathbb{Z}$, iar pentru $k = 0$ avem:
$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}},$$
rezultat uimitor prin faptul că unește puterea unității imaginare cu numerele transcendente e și π.

Funcțiile trigonometrice se definesc cu ajutorul funcției exponențiale prin formulele:
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$
Prin calcule nemijlocite, studentul se poate convinge că funcțiile $\sin z$ şi $\cos z$ sunt periodice cu perioada 2π, funcţia $\sin z$ este impară, iar funcția $\cos z$ este pară. Au loc toate relațiile trigonometrice cunoscute din cazul real. Totuși o proprietate specifică funcțiilor complexe este aceea că ele nu sunt mărginite, spre deosebire de restricțiile lor reale pentru care avem:
$$|\cos x| \leqslant 1, |\sin x| \leqslant 1$$
pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

De aceea prezintă interes rezolvarea în cadrul proiectului a ecuațiilor de exemplu de forma:
$$\sin z = 4, \cos z = 3i,$$
și conștientizarea faptului lipsei rezultatelor contradictorii, întrucât aceste ecuații nu admit nici o soluție reală.

Elaborarea acestor trei proiecte descrise mai sus cu siguranță va contribui la creșterea culturii matematice a viitorilor profesori de matematică. Orele de curs în cadrul disciplinei Analiza complexă, aplicând învățarea bazată pe proiecte, axată pe un studiu comparativ dintre cazul real și cel complex, transformă sala de curs într-un mediu colaborativ de învățare în care studentul dezvoltă competențele sale de explorare, produce materialele didactice proprii, iar unele probleme abordate chiar dacă vor solicita studentului mai mult timp de reflecții, vor ridica nivelul general de înțelegere a multor concepte fundamentale ale matematicii.

BIBLIOGRAFIE

1. KLINE, Morris. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York: Oxford University Press, 1972.
2. ACHIRI, Ion et al. Matematica. Manual pentru clasa a XI-a. Editura Prut Internațional, 2014.
3. KLEINER, Israel. Thinking the Unthinkable: The Story of Complex Numbers (with a Moral). Mathematics Teacher, vol. 81, no. 7, p. 583-592, 1988.
4. GAȘIȚOI, Natalia. Analiză complexă. Iași: Editura PIM, 2014.