Analele Ştiinţifice ale Universităţii de Stat "A. Russo" din Bălţi. - Serie nouă. Fasc. a. – 2004. - Tom XX

CZU 681.3

CERCETAREA ALGORITMULUI NISTREM LA REZOLVAREA APROXIMATIVĂ A ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE

Ţîcău Vitalie

În lucrare sunt prezentate metode numerice multipas de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale, în special algoritmul Nistrem, precum şi un program de însuşire şi rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale conform acestui algoritm.

В работе представлены многошаговые методы решения дифференциальных уравнений, в частности алгоритм Нистрема, а также программа обучения и решения дифференциальных уравнений согласно данному алгоритму.

In this paper the numerical multistep methods of solving differential equations, especially, the Nistrem's algorithm, and also a program of learning and solving differential equations by this algorithm are presented.

Introducere

Această lucrare este orientată spre rezolvarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale. Scopul acestei lucrări este de a înlesni însuşirea şi utilizarea metodei Nistrem la rezolvarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale.

Cu ajutorul ecuaţiilor diferenţiale se descriu diferite procese ale naturii. De exemplu, mişcarea unui sistem material de puncte, un circuit electric, starea unui corp solid ş. a.
Fără a diminua generalitatea, în lucrare sunt prezentate metode de rezolvare a *problemei Cauchy*.

De aceea noi vom cerceta în fond ecuaţia diferenţială de ordinul 1:

$$y' = f(t,y), \tag{1}$$

unde f este o funcţie de două variabile *t* şi *y* cu condiţia iniţială

$$y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

Metodele de rezolvare a problemei Cauchy sînt de două feluri: *exacte* şi *aproximative*.

Metodele aproximative se împart în *analitice* şi *numerice* [1, 2].

Metodele exacte se aplică la rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale, exprimând soluţia în funcţii elementare. Domeniul lor de aplicare este limitat şi uneori, practic, devine imposibil de obţinut soluţia în funcţii elementare.

Metodele aproximative analitice prezintă soluţia exactă *y(t)* ca limita unui şir de funcţii ori ca suma unei serii funcţionale.

Metodele numerice prezintă soluţia exactă *y(t)* în punctul următor pe baza informaţiei cunoscute în punctele precedente. Se disting metode numerice *unipas* şi *multipas* [2].

Metodele unipas sunt metodele care folosesc informaţia legată de comportarea funcţiei într-un singur pas al algoritmului numeric. Ca exemple de metode unipas: metodele Euler, Euler-Cauchy, metoda lui Runge-Kutta.

1. Metode numerice multipas

Atunci când se folosesc mai multe valori ale funcţiei determinate în paşii anteriori, metoda respectivă se numeşte multipas. O astfel de metodă este mai performantă decât metodele unipas, deoarece foloseşte informaţii suplimentare privind comportarea funcţiei în paşii premergători.

Dezavantajul principal al metodelor multipas constă în faptul că este nevoie de a iniţializa procesul iterativ. Pentru obţinerea datelor necesare de început se face apel la o metodă de tip unipas.

2. Algoritmul Nistrem

Procesul iterativ este construit conform formulei

$$y_k = y_{k-2} + h\sum_{j=1}^{r}\beta_j f_{k-j}, \tag{1}$$

unde

- r – numărul iniţial de noduri.
- coeficienţi β_j se determină ca soluţie a sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{r} \beta_j = 2 \\ \sum_{j=1}^{r-1} (r-1)^{s-1}\beta_j = \dfrac{r^s-(r-2)^s}{s}, \quad s = 2,\ldots, r-1. \end{cases} \tag{2}$$

La rezolvarea sistemului de ecuaţii liniare (2) se pot aplica metode clasice, de exemplu metoda Gauss-Jordan [1]. Formula recurentă (1) poate fi scrisă, de asemenea, în diferenţe finite.

Se iau nodurile $t_k, t_{k-1}, \ldots, t_{k-r}$ şi se integrează polinomul de interpolare al lui Newton (formula regresivă) în limitele de la t_{k-1} la t_{k+1} [3]:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h\sum_{j=0}^{r} \xi_j \Delta^j f_{k-j/2}, \tag{3}$$

unde ξ_j se determină din formulele:

$$\xi_0 = 2; \qquad \xi_i = \int_{-1}^{1} \frac{u(u+1)\ldots(u+(i-1))}{i!}du. \tag{4}$$

Calculând câţiva termeni:

$$\xi_1 = \int_{-1}^{1} \frac{u}{1!}du = 0; \qquad \xi_2 = \int_{-1}^{1} \frac{u(u+1)}{2!}du = \frac{1}{3}; \qquad \xi_3 = \int_{-1}^{1} \frac{u(u+1)(u+2)}{2!}du = \frac{1}{3};$$

$$y_4 = y_2 + h\sum_{j=0}^{3} \xi_j \Delta^j f_{k-j/2} = y_2 + h\cdot[\xi_0\cdot f_3 + \xi_1\cdot\Delta f_{5/2} + \xi_2\cdot\Delta^2 f_2 + \xi_3\cdot\Delta f_{3/2}] =$$

$$= y_2 + h\cdot[\xi_0\cdot f_3 + \xi_1\cdot(f_3-f_2) + \xi_2\cdot(f_3-2f_2+f_1) + \xi_3\cdot(f_3-3f_2+3f_1-f_0] =$$

$$= y_2 + h\cdot[2\cdot f_3 + 0\cdot(f_3-f_2) + \frac{1}{3}\cdot(f_3-2f_2+f_1) + \frac{1}{3}\cdot(f_3-3f_2+3f_1-f_0]$$

Astfel,

$$y_4 = y_2 + \frac{h}{3}\cdot[8\cdot f_3 - 5\cdot f_2 + 4\cdot f_1 - f_0];$$

$$y_5 = y_3 + \frac{h}{3}\cdot[8\cdot f_4 - 5\cdot f_3 + 4\cdot f_2 - f_1];$$

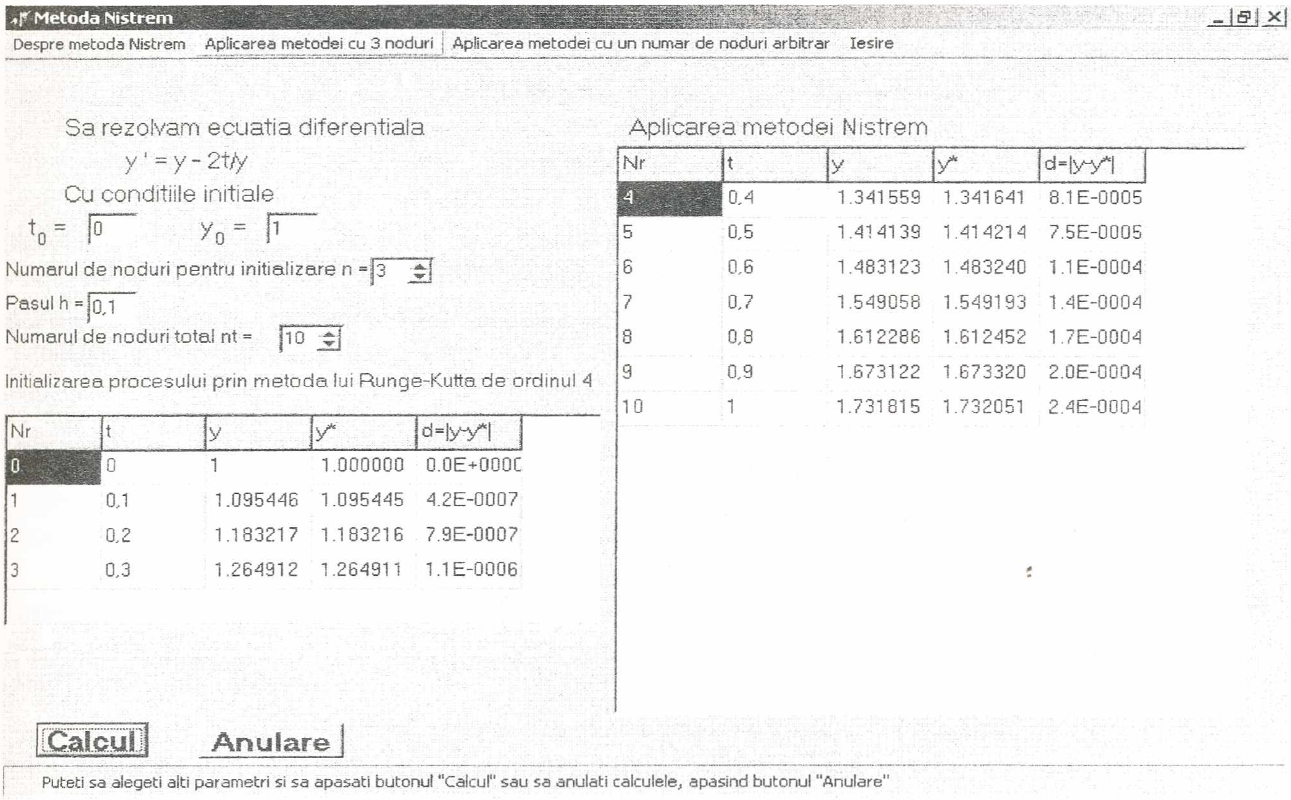
...

În mod analog se pod da formule de calcul şi pentru un număr iniţial de noduri, diferit de 4. Algoritmul prezentat este simplu şi conduce la erori relativ mici, de ordinul $O(h^5)$. În anumite situaţii, algoritmul nu este stabil. Datorită apariţiei acestui fenomen de instabilitate, folosirea algoritmului Nistrem este restrictivă [4].

Programul *nistremp.exe* este destinat aplicării algoritmului Nistrem la calculul unor exemple tipice de ecuaţii diferenţiale. Fie, că de exemplu, s-a ales rezolvarea ecuaţiei diferenţiale:

$$\begin{cases} y'(t) = y - \frac{2t}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Pe ecran apare următoarea fereastră:



Nr	t	y	y*	d=|y-y*|
0	0	1	1.000000	0.0E+000C
1	0.1	1.095446	1.095445	4.2E-0007
2	0.2	1.183217	1.183216	7.9E-0007
3	0.3	1.264912	1.264911	1.1E-0006

Nr	t	y	y*	d=|y-y*|
4	0.4	1.341559	1.341641	8.1E-0005
5	0.5	1.414139	1.414214	7.5E-0005
6	0.6	1.483123	1.483240	1.1E-0004
7	0.7	1.549058	1.549193	1.4E-0004
8	0.8	1.612286	1.612452	1.7E-0004
9	0.9	1.673122	1.673320	2.0E-0004
10	1	1.731815	1.732051	2.4E-0004

După cum se vede sunt iniţializate prin metoda Runge-Kutta valorile funcţiei necunoscute *y(t)* în 4 noduri. Apoi este aplicată metoda Nistrem la calculul valorilor funcţiei necunoscute în alte 6 noduri.

Concluzii

Cu toate că metodele unipas sunt cele mai simple şi cele mai cunoscute metode numerice de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale ordinare, nu se recomandă utilizarea lor pentru un număr de noduri mare, datorită cumulării unor erori mari de aproximare.

Cunoaşterea metodelor unipas devine necesară în înţelegerea şi implementarea unor metode numerice mai evoluate.

Metodele multipas şi, în special, metoda Nistrem, sunt mai performante decât metodele unipas, deoarece folosesc informaţii suplimentare privind comportarea funcţiei în paşii premergători.

Pentru determinarea coeficienţilor pentru aplicarea metodei Nistrem este necesar de rezolvat un sistem de ecuaţii liniare. Se poate aplica, de exemplu, metoda Gauss-Jordan.

Dezavantajul principal al metodelor multipas constă în faptul că este nevoie de a cunoaşte un şir de valori ale soluţiei, exacte sau aproximative, pentru a iniţia procesul iterativ. Pentru obţinerea datelor necesare pentru iniţiere, se aplică o metodă de tip unipas. Se foloseşte, de regulă, metoda lui Runge-Kutta.

Lucrarea poate fi utilizată în acumularea cunoştinţelor în domeniul analizei numerice atât de studenţi, cît şi de cei interesaţi în rezolvarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale.

Bibliografie

1. Копченова Н. В., Марон И. А. Вычислительна математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972. – 366 с.
2. Brătianu C., Bostan V., Cojocia L., Negreanu G. Metode numerice. – Bucureşti: Editura tehnică, 1996. – 207 p.
3. Secrieru I., Secrieru G. Analiza numerică. – Chişinău: Ştiinţa, 1985. – 260 p.
4. Березин И. С., Жидков Н. П.. Методы вычислений. – Москва: Наука, 1966. – 630 с.

Prezentat la 16.04.2004