

CERCETAREA ALGORITMULUI NISTREM LA REZOLVAREA APROXIMATIVĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

Țicău Vitalie

În lucrare sunt prezentate metode numerice multipas de rezolvare a ecuațiilor diferențiale, în special algoritmul Nistrem, precum și un program de însușire și rezolvare a ecuațiilor diferențiale conform acestui algoritm.

В работе представлены многошаговые методы решения дифференциальных уравнений, в частности алгоритм Нистрема, а также программа обучения и решения дифференциальных уравнений согласно данному алгоритму.

In this paper the numerical multistep methods of solving differential equations, especially, the Nistrem's algorithm, and also a program of learning and solving differential equations by this algorithm are presented.

Introducere

Această lucrare este orientată spre rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale. Scopul acestei lucrări este de a înlesni însușirea și utilizarea metodei Nistrem la rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale.

Cu ajutorul ecuațiilor diferențiale se descriu diferite procese ale naturii. De exemplu, mișcarea unui sistem material de puncte, un circuit electric, starea unui corp solid ș. a.

Fără a diminua generalitatea, în lucrare sunt prezentate metode de rezolvare a *problemei Cauchy*.

De aceea noi vom cerceta în fond ecuația diferențială de ordinul 1:

$$y' = f(t, y), \tag{1}$$

unde f este o funcție de două variabile t și y cu condiția inițială

$$y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

Metodele de rezolvare a problemei Cauchy sînt de două feluri: *exacte* și *aproximative*. Metodele aproximative se împart în *analitice* și *numerice* [1, 2].

Metodele exacte se aplică la rezolvarea ecuațiilor diferențiale, exprimând soluția în funcții elementare. Domeniul lor de aplicare este limitat și uneori, practic, devine imposibil de obținut soluția în funcții elementare.

Metodele aproximative analitice prezintă soluția exactă $y(t)$ ca limita unui șir de funcții ori ca suma unei serii funcționale.

Metodele numerice prezintă soluția exactă $y(t)$ în punctul următor pe baza informației cunoscute în punctele precedente. Se disting metode numerice *unipas* și *multipas* [2].

Metodele unipas sunt metodele care folosesc informația legată de comportarea funcției într-un singur pas al algoritmului numeric. Ca exemple de metode unipas: metodele Euler, Euler-Cauchy, metoda lui Runge-Kutta.

1. Metode numerice multipas

Atunci când se folosesc mai multe valori ale funcției determinate în pașii anteriori, metoda respectivă se numește *multipas*. O astfel de metodă este mai performantă decât metodele *unipas*, deoarece folosește informații suplimentare privind comportarea funcției în pașii premergători.

Dezavantajul principal al metodelor *multipas* constă în faptul că este nevoie de a inițializa procesul iterativ. Pentru obținerea datelor necesare de început se face apel la o metodă de tip *unipas*.

2. Algoritmul Nistrem

Procesul iterativ este construit conform formulei

$$y_k = y_{k-2} + h \sum_{j=1}^r \beta_j f_{k-j}, \tag{1}$$

unde

- r – numărul inițial de noduri.
- coeficienți β_j se determină ca soluție a sistemului de ecuații

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^r \beta_j = 2 \\ \sum_{j=1}^{r-1} (r-1)^{s-1} \beta_j = \frac{r^s - (r-2)^s}{s}, s = 2, \dots, r-1. \end{cases} \quad (2)$$

La rezolvarea sistemului de ecuații liniare (2) se pot aplica metode clasice, de exemplu metoda Gauss-Jordan [1]. Formula recurentă (1) poate fi scrisă, de asemenea, în diferențe finite.

Se iau nodurile $t_k, t_{k-1}, \dots, t_{k-r}$ și se integrează polinomul de interpolare al lui Newton (formula regresivă) în limitele de la t_{k-1} la t_{k+1} [3]:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^r \xi_j \Delta^j f_{k-j/2}, \quad (3)$$

unde ξ_j se determină din formulele:

$$\xi_0 = 2; \quad \xi_i = \int_{-1}^1 \frac{u(u+1)\dots(u+(i-1))}{i!} du. \quad (4)$$

Calculând câțiva termeni:

$$\xi_1 = \int_{-1}^1 \frac{u}{1!} du = 0; \quad \xi_2 = \int_{-1}^1 \frac{u(u+1)}{2!} du = \frac{1}{3}; \quad \xi_3 = \int_{-1}^1 \frac{u(u+1)(u+2)}{2!} du = \frac{1}{3};$$

$$\begin{aligned} y_4 &= y_2 + h \sum_{j=0}^3 \xi_j \Delta^j f_{k-j/2} = y_2 + h \cdot [\xi_0 \cdot f_3 + \xi_1 \cdot \Delta f_{5/2} + \xi_2 \cdot \Delta^2 f_2 + \xi_3 \cdot \Delta f_{3/2}] = \\ &= y_2 + h \cdot [\xi_0 \cdot f_3 + \xi_1 \cdot (f_3 - f_2) + \xi_2 \cdot (f_3 - 2f_2 + f_1) + \xi_3 \cdot (f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0)] = \\ &= y_2 + h \cdot [2 \cdot f_3 + 0 \cdot (f_3 - f_2) + \frac{1}{3} \cdot (f_3 - 2f_2 + f_1) + \frac{1}{3} \cdot (f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0)] \end{aligned}$$

Astfel,

$$y_4 = y_2 + \frac{h}{3} \cdot [8 \cdot f_3 - 5 \cdot f_2 + 4 \cdot f_1 - f_0];$$

$$y_5 = y_3 + \frac{h}{3} \cdot [8 \cdot f_4 - 5 \cdot f_3 + 4 \cdot f_2 - f_1];$$

...

În mod analog se pot da formule de calcul și pentru un număr inițial de noduri, diferit de 4. Algoritmul prezentat este simplu și conduce la erori relativ mici, de ordinul $O(h^5)$. În anumite situații, algoritmul nu este stabil. Datorită apariției acestui fenomen de instabilitate, folosirea algoritmului Nistrem este restrictivă [4].

Programul *nistrem.exe* este destinat aplicării algoritmului Nistrem la calculul unor exemple tipice de ecuații diferențiale. Fie, că de exemplu, s-a ales rezolvarea ecuației diferențiale:

$$\begin{cases} y'(t) = y - \frac{2t}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Pe ecran apare următoarea fereastră:

Metoda Nistrem _ | 6 | X

Despre metoda Nistrem Aplicarea metodei cu 3 noduri Aplicarea metodei cu un număr de noduri arbitrar Iesire

Să rezolvăm ecuația diferențială
 $y' = y - 2ty$
 Cu condițiile inițiale
 $t_0 = 0$ $y_0 = 1$

Numărul de noduri pentru inițializare $n = 3$

Pasul $h = 0,1$

Numărul de noduri total $nt = 10$

Inițializarea procesului prin metoda lui Runge-Kutta de ordinul 4

Nr	t	y	y*	d= y-y*
0	0	1	1.000000	0.0E+0000
1	0,1	1.095446	1.095445	4.2E-0007
2	0,2	1.183217	1.183216	7.9E-0007
3	0,3	1.264912	1.264911	1.1E-0006

Aplicarea metodei Nistrem				
Nr	t	y	y*	d= y-y*
4	0,4	1.341559	1.341641	8.1E-0005
5	0,5	1.414139	1.414214	7.5E-0005
6	0,6	1.483123	1.483240	1.1E-0004
7	0,7	1.549058	1.549193	1.4E-0004
8	0,8	1.612286	1.612452	1.7E-0004
9	0,9	1.673122	1.673320	2.0E-0004
10	1	1.731815	1.732051	2.4E-0004

Calcul **Anulare**

Puteti sa alegeti alti parametri si sa apasati butonul "Calcul" sau sa anulati calculele, apasind butonul "Anulare"

După cum se vede sunt inițializate prin metoda Runge-Kutta valorile funcției necunoscute $y(t)$ în 4 noduri. Apoi este aplicată metoda Nistrem la calculul valorilor funcției necunoscute în alte 6 noduri.

Concluzii

Cu toate că metodele unipas sunt cele mai simple și cele mai cunoscute metode numerice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale ordinare, nu se recomandă utilizarea lor pentru un număr de noduri mare, datorită cumulării unor erori mari de aproximare.

Cunoașterea metodelor unipas devine necesară în înțelegerea și implementarea unor metode numerice mai evolute.

Metodele multipas și, în special, metoda Nistrem, sunt mai performante decât metodele unipas, deoarece folosesc informații suplimentare privind comportarea funcției în pașii premergători.

Pentru determinarea coeficienților pentru aplicarea metodei Nistrem este necesar de rezolvat un sistem de ecuații liniare. Se poate aplica, de exemplu, metoda Gauss-Jordan.

Dezavantajul principal al metodelor multipas constă în faptul că este nevoie de a cunoaște un șir de valori ale soluției, exacte sau aproximative, pentru a iniția procesul iterativ. Pentru obținerea datelor necesare pentru inițiere, se aplică o metodă de tip unipas. Se folosește, de regulă, metoda lui Runge-Kutta.

Lucrarea poate fi utilizată în acumularea cunoștințelor în domeniul analizei numerice atât de studenți, cât și de cei interesați în rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale.

Bibliografie

1. Копченова Н. В., Марон И. А. Вычислительна математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972. – 366 с.
2. Brătianu C., Bostan V., Cojocia L., Negreanu G. Metode numerice. – București: Editura tehnică, 1996. – 207 p.
3. Secrieru I., Secrieru G. Analiza numerică. – Chișinău: Știința, 1985. – 260 p.
4. Березин И. С., Жидков Н. П.. Методы вычислений. – Москва: Наука, 1966. – 630 с.

Prezentat la 16.04.2004