Analele Ştiinţifice ale Universităţii de Stat "A. Russo" din Bălţi. - Serie nouă. Fasc. a. – 2004. - Tom XX

CZU 51(0.91)

PARADOXURILE TEORIEI MULŢIMILOR ŞI PROBLEMELE FUNDAMENTELOR MATEMATICII

Ştefaniţă Ion, Gaşiţoi Natalia

În lucrare sunt cercetate unele paradoxuri ale teoriei mulţimilor, care au condus la un studiu sistematic al fundamentelor matematicii şi logicii.

В данной работе рассматриваются некоторые парадоксы теории множеств, которые привели к систематическому исследованию основ математики и логики.

Some paradoxes of set theory, which required a systematic study of fundaments of mathematics and logic, are exposed in this paper.

Teoria mulţimilor, elaborată de Cantor, la faza iniţială a întâlnit neîncredere şi duşmănie din partea multor matematicieni, însă pe la sfârşitul secolului XIX a început să fie folosită în cele mai importante domenii ale matematicii. Însă în acel moment când rezultatele lui Cantor au fost recunoscute definitiv, au fost descoperite primele *paradoxuri ale teoriei mulţimilor* [1].

După cum se ştie, mulţimea constă din elemente, iar elementele mulţimii, la rândul lor, pot fi şi ele mulţimi. Şi atunci, dacă mulţimea în calitate de elemente poate conţine diferite mulţimi, se iveşte întrebarea: poate oare mulţimea să se conţină pe sine însăşi în calitate de element?

Este clar că mulţimea numerelor naturale nu este număr natural şi, prin urmare, nu se conţine pe sine în calitate de element. Mulţimea care nu se conţine pe sine în calitate de element o vom numi *obişnuită*, iar mulţimea care se conţine pe sine în calitate de element o vom numi *neobişnuită.*

Dăm următoarele exemple de mulţimi neobişnuite.

1. Cercetăm mulţimea tuturor mulţimilor şi o însemnăm prin U. E clar că U se conţine pe sine, fiindcă conţine toate mulţimile, dar ea este mulţime.
2. Mulţimea noţiunilor abstracte este şi ea însăşi o noţiune abstractă şi deci se conţine pe sine în calitate de element.

Să cercetăm acum mulţimea S a tuturor mulţimilor obişnuite. Această mulţime S poate fi ori *obişnuită*, ori *neobişnuită*. Să cercetăm aceste posibilităţi. Presupunem că S este mulţime obişnuită. Însă S conţine în calitate de elemente toate mulţimile obişnuite. De aceea $S \in S$ şi deci este *neobişnuită*. Aceasta contrazice presupunerii. Admitem că S este *neobişnuită*. În aşa caz, conform definiţiei mulţimii *neobişnuite*, S se conţine pe sine în calitate de element şi, deoarece S constă numai din mulţimi obişnuite, conchidem că S este mulţime obişnuită. Şi aceasta contrazice presupunerii.

În aşa fel, S nu poate fi nici *obişnuită* şi nici *neobişnuită*. Acesta este paradoxul ori antinomia lui Russell.

Să cercetăm acum antinomia lui Cantor. Fie U mulţimea tuturor mulţimilor şi U^* mulţimea tuturor submulţimilor lui U. Atunci mulţimea U^* are puterea mai mare ca U (teorema Cantor-Bernstain), ceea ce este paradoxal, fiindcă, după definiţie U, este mulţimea ce conţine toate mulţimile în particular şi pe cele ce aparţin lui U^*. Paradoxurile teoriei mulţimilor au trezit la matematicieni interesul de a supune unui studiu sistematic bazele matematicii şi logicii. Subiectul autentic care aparţine fundamentelor matematicii îl constituie natura şi semnificaţia matematicii, probleme care au suscitat îndelungate şi fecunde controverse, explicate după unii autori prin faptul că dezvoltările "tehnice" datorate lui Boole, Cantor, Dedekind, Schroder, Frege, Weierstrass, Peano, Zermelo au fost însoţite la începutul secolului al XX-lea de programe ce au asumat concepţii filozofice rivale, în esenţă absolutiste: *logicismul* elaborat de Russell, plecând de la ideile lui Frege, a propus unificarea matematicii prin reducerea sistematică a părţilor ei la cele mai elementare şi generale părţi – logica şi noţiunea de mulţime; *formalismul* (programul lui Hilbert) care a absolutizat studiul structurilor simbolice ale limbajului matematic, începând să explice utilizarea lor în termenii regulilor sintactice a căror justificare urma să fie garantată de demonstraţii de consistenţă; *intuiţionismul*, care emerge din tendinţe avansate de Kronecker şi Poincare, dar care au fost inspirate şi de unele idei ale lui Kant, a enunţat renunţarea radicală la utilizarea clasică a limbajului şi logicii şi a cerut o limitare severă a tipurilor de construcţii matematice admisibile.

Să cercetăm câteva probleme principale, ce stau în faţa ştiinţei în legătură cu studierea *infinitului.* Ne-am obişnuit să acceptăm o concepţie naivă asupra uneia dintre cele mai tulburătoare probleme – problema infinitului. Analiza profundă a acestei noţiuni a adus la divizarea infinitului în *infinit potenţial* şi *infinit actual.* Matematicienii se întâlnesc cu infinitul pentru prima dată studiind infinitul. Unitatea este numărul iniţial. Adăugând la ea numărul 1, obţinem numărul 2. Adăugând la numărul 2 o unitate, obţinem numărul 3 ş. a. m. d. Vom considera că, obţinând un oarecare număr natural n, noi putem face încă un pas şi obţinem numărul $n+1$. În aşa mod noi admitem abstracţia *infinitului potenţial.* Noi considerăm că în construcţia expusă după fiecare pas există următorul pas.

În multe întrebări ale matematicii mulţimea numerelor naturale $N=\{1,2,\ldots n,\ldots\}$ se cercetează ca un tot întreg, dar aceasta înseamnă că procesul arătat mai sus de alcătuire a numerelor naturale este considerat finisat. În aşa mod e folosită abstracţia infinitului actual. *Abstracţia infinitului actual prezintă admiterea posibilităţii de finisare a unui proces infinit.* Arătăm că, construind numere reale, noi esenţial folosim abstracţia infinitului actual. Cercetăm, de exemplu, modul cum se construieşte numărul $\sqrt{2}$. Fie AB segmentul ce reprezintă diagonala pătratului cu lungimea laturii egală cu unitatea. Vom măsura segmentul AB. Unitatea de lungime se va suprapune pe el o singură dată şi va mai rămâne un careva rest. Divizăm unitatea de lungime în 10 părţi egale şi a zecea parte o suprapunem pe restul rămas din diagonala AB. Ea se va suprapune de 4 ori, iarăşi va rămâne un careva rest. După aceasta divizăm unitatea de lungime în 100 părţi egale şi suprapunem pe rest a suta parte din unitate ş. a. m. d.; făcând 7 paşi de aşa fel noi vom obţine numărul 1,414213. (Dacă noi vom construi în acest mod numărul π, atunci făcând 16 paşi de măsură respectivă vom obţine numărul 3,141592653589793). Aplicând abstracţia infinitului potenţial, vom socoti, că construcţia arătată a numărului $\sqrt{2}$, după fiecare pas urmează următorul pas, adică procesul poate fi prelungit ori de câte ori vrem. Însă nu ne oprim în gândirea noastră la aceasta, dar considerăm că procesul măsurării e finisat. În rezultatul acestei construcţii noi vom obţine o fracţie zecimală infinită. Ea şi se numeşte numărul $\sqrt{2}$.

Numărul $\sqrt{2}$ îl cercetăm ca un singur obiect cu toate semnele zecimale ce se conţin în el. Studiind acest număr noi, în aşa fel, considerăm procesul de măsurare a lungimii segmentului AB, ce reprezintă diagonala pătratului cu latura unitate, finisat.

Studiind mulţimea numerelor reale, noi considerăm finisate procesele de măsurare a lungimilor tuturor segmentelor.

Subliniem că analiza matematică şi geometria analitică au la bază noţiunea de număr real. Prin urmare, la baza matematicii clasice stă abstracţia infinitului actual. Reprezentanţii diferitor şcoli ştiinţifice se opun folosirii acestei abstracţii. Aici ei subliniază că abstracţia infinitului actual nu se bazează pe rezultatele experimentale ale ştiinţei naturale.

"Însă în matematica clasică teoria numerelor reale se construieşte nu ca teoria obiectelor constructive de tip determinat, predestinate pentru exprimarea informaţiilor concrete despre mărimile fizice, însă ca teorie, obiectele căreia prezintă unele închipuiri formate în imaginaţia matematicianului în rezultatul proceselor complicate de idealizare. În calea dintre procesele de măsurare a mărimilor fizice şi acele închipuiri, care sunt legate de termenul "număr real", stă abstracţia infinitului actual" [2].

Să ne oprim acum la legea terţului exclus, care se aplică pe larg în matematica clasică. Dacă este arătat că afirmaţia A este justă, atunci de aici imediat rezultă, că afirmaţia $\overline{A}$, ce prezintă negarea lui A, este falsă. Şi invers, din justeţea lui $\overline{A}$ rezultă falsitatea lui A.

Pe aceste raţionamente este bazată metoda demonstraţiei de la contrariu. Astfel, de exemplu, afirmând că există număr raţional, pătratul căruia este egal cu 2, ajungem la contrazicere. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă. De aici conchidem că nu există număr raţional pătratul căruia este egal cu 2. Legea terţului exclus se foloseşte, de asemenea, la demonstraţia teoremei despre puterea mulţimii submulţimilor mulţimi date.

Teorema Cantor-Bernstain afirmă că puterea mulţimii submulţimilor mulţimii date este mai mare decât puterea mulţimii date. Este clar că legea terţului exclus este justă când este aplicată la mulţimi finite. Însă legile mulţimilor finite nu pot fi transferate în mod mecanic la mulţimile infinite.

Să cercetăm mai atent legea terţului exclus. Fie că avem o mulţime finită de numere naturale. Punem întrebarea: este în această mulţime număr ce se împarte la 3? Întrebarea se rezolvă prin încercări nemijlocite. Privim primul număr. Dacă el se împarte la 3, întrebarea e rezolvată, dacă nu se împarte, trecem la următorul număr ş.a.m.d., până când nu ajungem la ultimul număr. Este clar că pentru mulţimile finite sunt posibile două concluzii, ce se exclud reciproc:

1) în mulţimea dată este număr ce se împarte la 3 (afirmaţia A);
2) în mulţimea dată nu este număr ce se împarte la 3 (afirmaţia $\overline{A}$).

Dăm încă un exemplu. Fie dată o careva fracţie zecimală finită $N,\alpha_1\alpha_2...\alpha_k$. Punem întrebarea; se vor găsi în această fracţie 4 de unu la rând? Ca şi în exemplul precedent, putem răspunde la această întrebare prin privirea nemijlocită la fracţie de la început spre sfârşit. Şi în acest exemplu sunt două posibilităţi:

1) se întâlnesc la rând patru unităţi (afirmaţia A);
2) nu se întâlnesc la rând patru unităţi (afirmaţia $\overline{A}$).

Fie acum că avem o fracţie zecimală neperiodică infinită. De exemplu, numărul

$\sqrt{2}$ =1,4142135624...

Punem aceeaşi întrebare: se întâlnesc oare în această fracţie patru unităţi la rând sau nu. Noi acum nu putem să observăm toate semnele zecimale ale acestei fracţii, fiindcă ele sunt o infinitate. Ce este inclus în afirmaţia: "în înscrierea numărului $\sqrt{2}$ se întâlnesc la rând patru unităţi"?

Se poate de afirmat următoarele "noi am găsit locul, începând de la care se găsesc la rând patru unităţi". Afirmaţia opusă "noi nu am găsit aşa loc" încă nu înseamnă că aşa loc nu există. Negarea primei afirmaţii ar avea sens numai în cazul, dacă noi am fi putut demonstra că presupunerea existenţei a patru unităţi la rând contrazice legii formării numărului $\sqrt{2}$. Afirmaţiile: "am găsit locul unde se află patru unităţi la rând" şi "am ajuns la contrazicere, presupunând, că locul cu patru unităţi există" – prezintă două afirmaţii pozitive, fiecare dintre ele având conţinutul său propriu, independent de conţinutul celeilalte (nu trebuie să confundăm afirmaţia a doua cu afirmaţia "am ajuns la contrazicere cu afirmaţia că există loc cu patru unităţi la rând").

Despre două afirmaţii pozitive, fiind chiar incompatibile una cu alta, nu se poate spune dinainte că ele se exclud una pe alta şi că nu este posibilă o a treia afirmaţie. Cu alte cuvinte, la două afirmaţii pozitive poate fi neaplicabilă legea terţului exclus, conform căreia negarea unei afirmaţii înseamnă justeţea celeilalte. Aşa că, dacă afirmaţia "am găsit locul" este falsă, de aici deloc nu rezultă, că afirmaţia "am ajuns la contrazicere" e justă.

Având afirmaţiile de mai sus, în mod explicit se iveşte următoarea întrebare. Cum trebuie de înţeles afirmaţia: " în înscrierea numărului $\sqrt{2}$ se întâlnesc la rând patru unităţi"? Cu alte cuvinte, cum de înţeles afirmaţia :"în înscrierea numărului $\sqrt{2}$ există loc pe care stau la rând patru unităţi"? Unul din răspunsurile la această întrebare constă în aceea de a găsi acest loc, de a-l arăta, de a-l construi. În aşa fel, se iveşte întrebarea fundamentală despre aceea ce trebuie de înţeles prin "*existenţă*" în matematică, la care reprezentanţii diferitor direcţii şi şcoli dau răspunsuri diferite.

Să ne amintim că *ipoteza continuumului* pune întrebarea despre *existenţa* mulţimii, puterea căreia este mai mare decât puterea mulţimii numerabile şi mai mică decât puterea continuumului. Este clar că această problemă este legată de cele mai de bază întrebări din domeniul fundamentelor matematicii. Înainte de a rezolva această problemă, este necesar de a ne lămuri ce să înţelegem prin afirmaţia "*există*".

Să subliniem că refuzând abstracţia infinitului actual şi legea terţului exclus în aplicaţie la mulţimi infinite conduc la reconstruirea fundamentală a tuturor domeniilor matematicii clasice. Adepţii acestei reconstrucţii obţin rezultate ce se deosebesc esenţial de teoria clasică. De exemplu, ei au o atitudine negativă faţă de aşa numitele teoreme de existenţă "curată", adică teoreme, în care se demonstrează existenţa unui obiect, fără a se arăta metoda găsirii acestui obiect. Aşa este, de exemplu, teorema lui Bolzano-Cauchy. Pentru funcţia continuă pe segmentul $[a,b]$ ce primeşte la capetele lui valori de semne opuse ea demonstrează existenţa unui aşa punct $c \in [a,b]$ în care funcţia primeşte valoarea zero. Însă teorema nu dă metoda de găsire a acestui punct.

Reprezentanţii direcţiei constructive în matematică nu arată numai că teoremele de "existenţă curată" nu dau algoritmul corespunzător, dar şi demonstrează că pentru un şir de teoreme astfel de algoritm e imposibil.

Însă în vremea actuală, majoritatea matematicienilor sunt duşmanii unei reconstrucţii radicale a matematicii clasice. Ei se străduie să păstreze tot ce e acumulat şi e preţios în matematică. Pentru aceasta în teoria mulţimilor sunt introduse aşa restricţii, care exclud paradoxurile descoperite în ea şi, în acelaşi timp, păstrează acea parte a teoriei, care este necesară pentru construcţia clasică a matematicii.

Printre diferitele direcţii în lucrul efectuat pentru a crea o bază mai trainică a teoriei mulţimilor se evidenţiază cea mai fructuoasă, şi anume direcţia axiomatică. Oricare nu ar fi punctul de vedere faţă de paradoxurile descoperite în teoria mulţimilor, este necesar de evidenţiat clar acele raţionamente care aduc la contrazicere. Cea mai convenabilă pentru acest ţel este metoda axiomatică.

Pentru teoria mulţimilor se creează baza axiomatică, asemenea bazei geometriei elementare (să ne amintim sistema de axiome ale geometriei expusă în cursul şcolar). În ea nu se defineşte ce este "mulţime", ce este "element", ce înseamnă că "elementul aparţine mulţimii", însă într-un şir de propoziţii (axiome) sunt enumerate toate condiţiile, care se suprapun acestor noţiuni.

Cu ajutorul acestor condiţii, noţiunea de mulţime este îngustată atât, ca să fie excluse situaţiile care duc la contrazicere şi, în acelaşi timp, să fie păstrate după putinţă toate rezultatele teoriei mulţimilor, pe care se bazează matematica clasică.

Să ne oprim mai detaliat la caracterizarea metodei axiomatice. Orice noţiune introdusă în teoria matematică trebuie să fie definită exact (precis). Însă, după cum ştim, fiecare definiţie conduce noţiunea nouă la cele cunoscute mai înainte. În aşa fel, construcţia oricărei teorii trebuie de început de la careva noţiuni primare (iniţiale, de bază).

Pentru a evidenţia noţiunile de bază, faţă de ele se formulează unele propoziţii, numite axiome, în care se determină relaţiile dintre aceste noţiuni. Indicarea sistemului de axiome prezintă o metodă de definire a noţiunilor noi. Unul şi acelaşi sistem de axiome poate fi satisfăcut de diferite totalităţi de obiecte. Fiecare totalitate de obiecte, pentru care e just sistemul de axiome, se numeşte interpretarea acestui sistem. Fiecare domeniu al matematicii, de exemplu, aritmetica ori geometria, începe construcţia sa cu evidenţierea unui număr (după posibilităţi minimal) de noţiuni primare. De exemplu, noţiunile de bază ale geometriei sunt punctul, dreapta, planul şi câteva altele. Noţiunea de bază a aritmeticii este numărul natural.

Altă construcţie a aritmeticii se efectuează pe baza unui sistem de axiome. Noţiunile iniţiale ale teoriei sunt: mulţimea **N**, elementele căreia se numesc numere naturale; evidenţierea în această mulţime a elementului 1, numit unitate; relaţia binară "elementul b urmează nemijlocit după elementul a". aceste noţiuni se definesc cu ajutorul următorului sistem de axiome (numite axiomele lui Peano):

I. Unitatea nu urmează nici după un alt număr natural.

II. Pentru oricare număr natural există unul şi numai un singur număr natural ce urmează după acest număr natural.

III. Oricare număr natural, în afară de 1, nemijlocit urmează după unul şi numai după un singur număr natural.

IV. Axioma inducţiei. Dacă submulţimea M a mulţimii $\mathbf{N}$ conţine 1 şi de rând cu elementul x conţine, de asemenea, elementul y, care nemijlocit urmează după x, atunci M coincide cu $\mathbf{N}$.

Toate teoremele aritmeticii se demonstrează pe baza acestor axiome. Construirea aritmeticii pe baza sistemului de axiome, este legat de unele greutăţi. Chestiunea e într-aceea că, introducând careva sistem de axiome, este necesar de stabilit că el nu este contradictoriu.

Sistemul de axiome nu este contradictoriu, dacă căpătând din el diferite consecinţe logice, niciodată nu vom primi în acelaşi timp justeţea şi falsitatea unei afirmaţii, adică nu vom stabili că afirmaţiile A şi $\overline{A}$ sunt juste simultan.

Dacă sistemul de axiome este contradictoriu, atunci folosind-o se poate demonstra tot ce doreşti, de aceea el nu are nici o valoare.

În lucrările destinate fundamentelor matematicii este necesar de cercetat esenţa matematicii, premisele şi ţelurile ei, raportul ei faţă de alte domenii ale ştiinţei. Către aceste întrebări filosofice se alipesc cercetările problemelor construcţiei matematicii, a structurii ei, a metodelor sale de demonstraţie.

Concluzii

Studiul fundamentelor matematicii nu se circumscrie domeniului strict al matematicii, căci, deşi nu este izolat de dezvoltarea matematicii, se inspiră ca tematică şi metodică din disciplinele dincolo de frontiera acestei ştiinţe.

La problema fondării nu se poate răspunde invocând rezultatele obţinute, căci, spune Mostowski, "chestiunea fondării matematicii nu reprezintă o problemă concretă singulară care poate fi rezolvată odată pentru totdeauna, pentru a fi dată apoi uitării (...) Natura şi obiectul matematicii au constituit din vremurile străvechi obiectul consideraţiilor filozofilor şi nu încape îndoială că ele vor rămâne aşa şi pe viitor. În acelaşi timp, însăşi matematica evoluează cu timpul, ceea ce atrage după sine necesitatea modificării concepţiilor asupra fundamentelor sale. Trăsătura distinctivă a cercetărilor actuale în fundamentele matematicii este pierderea parţială a caracterului lor filozofic, faptul că ele au căpătat un caracter matematic". Marile "impasuri" sau "crize" fundaţionale ale matematicii – apariţia numerelor iraţionale, a geometriilor neeuclidiene şi, în deosebi, a paradoxurilor – au stimulat şi întreţinut efortul şi reflecţia filozofică, au relevat rolul analizei filozofice şi al soluţiilor, ipotezelor filozofice. Graţie cercetărilor dedicate fundamentelor matematicii a apărut ramura ei rodnică – logica matematică, obiectul căreia este evidenţierea şi sistematizarea proceselor logice, folosite în demonstraţiile matematice.

Bibliografie

1. Бурбаки Н. Теория множеств. - М.: Мир. 1965. – 455 с.
2. Шанин Н. А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства // Труды математического института им. В. А. Стеклова. - 1962. - Т. 67. - С. 67-69.

Prezentat la 16.04.2004