CZU 517.91

CONDIŢII DE MĂRGINIRE A SOLUŢIILOR SISTEMELOR DE ECUAŢII DIFERENŢIALE

Ştefaniţă Ion, Anţalovschi Natalia

În articol sunt stabilite unele condiţii de mărginire a soluţiilor unui sistem de ecuaţii diferenţiale neliniare.

В данной работе установлены некоторые условия ограниченности решений систем нелинейных дифференциальных уравнений.

In the present paper we will determine any sufficient finite conditions of solution to a nonlinear differential equations system's.

Introducere

Este bine cunoscut că procesele ce decurg în lumea obiectivă au ca model matematic ecuaţiile diferenţiale. Descrierea completă a proceselor este stabilită definitiv când pot fi găsite soluţiile ecuaţiei. Însă, deseori, aceste soluţii nu pot fi exprimate prin integrale şi, de aceea, se iveşte problema de a stabili decurgerea unui fenomen fără a cunoaşte explicit legităţile lui. În aşa caz este important de a determina unele condiţii care ne dau posibilitatea de a afirma existenţa fenomenului şi comportarea lui fără a evidenţia explicit acest fenomen. Acestor întrebări îi este dedicată următoarea lucrare.

Partea analitică

În această lucrare se studiază comportarea la infinit a soluţiilor sistemului neliniar:

$$\ddot{X}(t) + A(t)\dot{X}(t) + B(t)f(X(t)) = 0, \tag{1}$$

unde matricele pătrate A(t) şi B(t) sunt continui pe $[t_0;+\infty)$;

$$f(X(t)) = col(f_1(X_1(t)), f_2(X_2(t)), \dots, f_n(X_n(t)));$$

$$X(t) = col(X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)).$$

Vom presupune că soluţiile sistemului sunt prelungibile nemărginit.

Vom scrie sistemul (1) desfăşurat:

$$\begin{cases} \ddot{X}_1(t) + a_{11}(t)\dot{X}_1(t) + \dots + a_{1n}(t)\dot{X}_n(t) + b_{11}(t)f_1(X_1) + \dots + b_{1n}f_n(X_n), \\ \ddot{X}_2(t) + a_{21}(t)\dot{X}_1(t) + \dots + a_{2n}(t)\dot{X}_n(t) + b_{21}(t)f_1(X_1) + \dots + b_{2n}f_n(X_n), \\ \dots \\ \ddot{X}_n(t) + a_{n1}(t)\dot{X}_1(t) + \dots + a_{nn}(t)\dot{X}_n(t) + b_{n1}(t)f_1(X_1) + \dots + b_{nn}f_n(X_n). \end{cases}$$

Această scriere ne va permite să înţelegem mai clar cele ce urmează (se poate de cercetat cazul particular n=2).

Vom socoti:

$$F_i(X_i) = \int_0^{X_i} f_i(X_i)dX_i = \int_{t_0}^{t} f_i(X_i(s))\dot{X}_i(s)ds \geq 0, \text{ unde } t \geq t_0.$$

Teorema 1: Fie matricea B(t) pozitiv-determinată, simetrică, nedegenerată şi continuu-diferenţiabilă pentru $t \geq t_0$ şi

1) $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty} \mu(s) \left\| \frac{dB^{-1}(s)}{ds} - 2B^{-1}(s)A(s) \right\| ds < \infty,$

unde $\mu(t)$ este cea mai mare valoare proprie a matricei B(t);

2) $\displaystyle\lim_{|X_i| \to +\infty} F_i(X_i) = +\infty, \ i = 1, 2, \dots, n,$

atunci toate soluţiile sistemului (1) sunt mărginite pentru $t \geq t_0$.

Demonstraţie: Presupunem că există soluţia nemărginită a sistemului (1). Atunci, conform condiţiei 2), vom avea:

$$\lim_{|X_i|\to+\infty} F_i(X_i) = +\infty,$$

şi deci, $\sum_{i=1}^{\infty} F_i(X_i)$ va fi nemărginită.

Matricea $B^{-1}(t)$ va fi simetrică şi pozitiv-determinată. Înmulţind sistemul (1) la $B^{-1}(t)$ din stânga şi la $\dot{X}(t)$ scalar din dreapta şi integrând de la t_0 la t, obţinem:

$$\int_{t_0}^{t}\left(B^{-1}(s)\ddot{X}(s),\dot{X}(s)\right)ds + \int_{t_0}^{t}\left(B^{-1}(s)A(s)\dot{X}(s),\dot{X}(s)\right)ds + \int_{t_0}^{t}\left(f(s),\dot{X}(s)\right)ds. \tag{2}$$

E uşor de verificat că:

$$\frac{d}{dt}\left(B^{-1}(t)\dot{X},\dot{X}\right) = \left(\frac{dB^{-1}(t)}{dt}\dot{X},\dot{X}\right) + 2\left(B^{-1}(t)\ddot{X},\dot{X}\right) \tag{3}$$

Substituind egalitatea (3) în (2), vom primi:

$$\frac{1}{2}\left(B^{-1}(t)\dot{X},\dot{X}\right) = C + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{dB^{-1}(s)}{ds}\dot{X},\dot{X}\right)ds - \int_{t_0}^{t}\left(B^{-1}(s)A(s)\dot{X},\dot{X}\right)ds - \sum_{i=1}^{n} F_i(X_i), \tag{4}$$

de unde:

$$\left(B^{-1}(t)\dot{X},\dot{X}\right) \le 2C + \int_{t_0}^{t}\left(\left[\frac{dB^{-1}(s)}{ds} - 2B^{-1}(s)A(s)\right]\dot{X},\dot{X}\right)ds,$$

ori:

$$\lambda(t)\left\|\dot{X}(t)\right\| \le 2C + \int_{t_0}^{t}\left\|\frac{dB^{-1}(s)}{ds} - 2B^{-1}(s)A(s)\right\|\cdot\left\|\dot{X}\right\|^2 ds, \tag{5}$$

unde $\lambda(t) = \frac{1}{\mu(t)}$ este cea mai mică valoare proprie a matricei $B^{-1}(t)$.

Folosind lema lui Belman [1], care ne spune că:

Lemă: Dacă funcţia X(t) este continuă pe segmentul [a;b] şi satisface inegalitatea:

$$X(t) < C + \int_{t_0}^{t}\psi(s)X(s)ds,$$

unde C>0, $\psi(s)$ este funcţie continuă, $\psi \ge 0$, atunci:

$$X(t) \le C\cdot\exp\int_{t_0}^{t}\psi(s)ds,$$

din (5), obţinem:

$$\lambda(t)\left\|\dot{X}\right\|^2 \le C_1\cdot\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\mu(s)\left\|\frac{dB^{-1}(s)}{ds} - 2B^{-1}(s)A(s)\right\|ds\right\} \le C_2.$$

Înseamnă că:

$$\left\|\dot{X}(t)\right\|^2 \le C_2\mu(t). \tag{6}$$

Din relaţiile (4) şi (6), primim:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(X_i) \le C_3,$$

ceea ce contrazice presupunerea că există soluţie nemărginită a sistemului (1).

Teorema este demonstrată.

Observaţie: Dacă în condiţiile teoremei 1

$$\lim_{|X_k|\to+\infty} F_k(X_k) = +\infty,$$

pentru careva $1 \le k \le n$, atunci coordonata corespunzătoare $X_k(t)$ a soluţiei $X(t)$ va fi mărginită.

Teorema 2: Presupunem că:

1) $(A(t)\xi,\xi) > 0$ pentru orice ξ şi orice $t \ge t_0$;

2) există aşa o matrice $R(t)$, încât

$$\|B(t)g(X)\| \le r(t)\|R(t)X\|,$$

unde $g(X)=f(X)-X$ şi $r(t)$ este o funcţie scalară;

3) există matricea simetrică, continuu-derivabilă $P(t) = \sqrt{B(t)}$, aşa încât:

$$\lambda(t) - 2\int_{t_0}^{t}\left(\left\|\frac{dP(s)}{ds}\right\| + r(s)\|R(s)\|\right)ds \ge k > 0,$$

unde $\lambda(t)$ este cea mai mică valoare proprie a matricei $P(t)$. Atunci toate soluţiile sistemului (1) sunt mărginite pentru $t \ge t_0$.

Demonstraţie: Sistemul (1) îl scriem în forma:

$$\ddot{X} + A(t)\dot{X} + B(t)X + B(t)(f(X) - X) = 0.$$

Înmulţim scalar din partea dreaptă la $\dot{X}$ şi integrând, obţinem:

$$\int_{t_0}^{t}(\ddot{X},\dot{X})ds + \int_{t_0}^{t}(A(s)\dot{X},\dot{X})ds + \int_{t_0}^{t}(P(s)X,P(s)\dot{X})ds + \int_{t_0}^{t}(B(s)g(X),\dot{X})ds = 0. \qquad (7)$$

Observăm că:

$$\frac{d}{dt}(PX,PX) = \left(\frac{dP}{dt}X + P\dot{X}, PX\right) + \left(PX, \frac{dP}{dt}X + P\dot{X}\right) = 2(PX,P\dot{X}) + 2\left(\frac{dP}{dt}X, PX\right).$$

Prin urmare:

$$(PX,P\dot{X}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(PX,PX) - \left(\frac{dP}{dt}X, PX\right).$$

Din altă parte:

$$\frac{d}{dt}(\dot{X},\dot{X}) = 2(\ddot{X},\dot{X})$$

şi

$$(\ddot{X},\dot{X}) = \frac{d}{2dt}(\dot{X},\dot{X}).$$

Substituind ultimele două relaţii în (7), vom avea:

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{ds}(\dot{X},\dot{X})ds + \int_{t_0}^{t}(A\dot{X},\dot{X})ds + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{ds}(PX,PX)ds - \int_{t_0}^{t}\left(\frac{dP}{ds}X, PX\right)ds + \int_{t_0}^{t}(B(s)g(X),\dot{X})ds = 0.$$

De aici:

$$\frac{1}{2}\|\dot{X}\|^2 + \frac{1}{2}\|PX\|^2 = C + \int_{t_0}^{t}\left(\frac{dP(s)}{ds}X, P(s)X\right)ds - \int_{t_0}^{t}(B(s)g(X),\dot{X})ds - \int_{t_0}^{t}(A\dot{X},\dot{X})ds.$$

Folosind condiţia 1) a teoremei, putem scrie:

$$\frac{1}{2}\|\dot{X}\|^2 + \frac{1}{2}\|PX\|^2 \le C + \int_{t_0}^{t}\left(\frac{dP(s)}{ds}X, P(s)X\right)ds - \int_{t_0}^{t}(B(s)g(X),\dot{X})ds,$$

şi

$$\frac{1}{2}\left(\|\dot{X}\|^2 + \|PX\|^2\right) \le C + \int_{t_0}^{t}\left\|\frac{dP(s)}{ds}X\right\|\cdot\|P(s)X\|ds + \int_{t_0}^{t}\|B(s)g(X)\|\cdot\|\dot{X}\|ds \le$$

$$\leq C + \int_{t_0}^{t}\left(\left\|\frac{dP(s)}{ds}X\right\|\cdot\|P(s)X\| + \left\|\frac{dP(s)}{ds}X\right\|\cdot\|\dot{X}\| + r(s)\cdot\|R(s)X\|\cdot\|P(s)X\| + r(s)\cdot\|R(s)X\|\cdot\|\dot{X}\|\right)ds = \quad (8)$$

$$= C + \int_{t_0}^{t}(\|P(s)X\| + \|\dot{X}\|)\cdot\left(\left\|\frac{dP(s)}{ds}X\right\| + r(s)\|R(s)X\|\right)ds.$$

Pentru a stabili inegalitatea (8) am folosit condiţia 2) a teoremei. Din (8) obţinem:

$$2\left(\|\dot{X}\|^2 + \|P(t)X\|^2\right) \leq 4C + 4\int_{t_0}^{t}(\|P(s)X\| + \|\dot{X}\|)\cdot\left(\left\|\frac{dP(s)}{ds}X\right\| + r(s)\|R(s)X\|\right)ds. \quad (9)$$

Luând în consideraţie că:

$$(\|\dot{X}\| + \|P(t)X\|)^2 \leq 2\left(\|\dot{X}\|^2 + \|P(t)X\|^2\right),$$

pe baza inegalităţii (9) putem scrie:

$$(\|\dot{X}\| + \|P(t)X\|)^2 \leq 4C + 4\int_{t_0}^{t}(\|P(s)X\| + \|\dot{X}\|)\cdot\left(\left\|\frac{dP(s)}{ds}X\right\| + r(s)\|R(s)X\|\right)ds. \quad (10)$$

Pe baza lemei lui Aurion-Lian, care afirmă că din inegalitatea:

$$u^2(t) \leq C_1 + \int_{t_0}^{t} u(t_1)v(t_1)dt_1, \quad (C_1>0,\ u(t)\geq 0,\ v(t)\geq 0),$$

rezultă inegalitatea:

$$u(t) \leq \sqrt{C_1} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} v(t_1)dt_1,$$

din (10) obţinem:

$$\|\dot{X}\| + \|P(t)X\| \leq C_2 + 2\int_{t_0}^{t}\left(\left\|\frac{dP(s)}{ds}X\right\| + r(s)\|R(s)X\|\right)ds,$$

şi deci:

$$\|P(t)X\| \leq C_2 + 2\int_{t_0}^{t}\left(\left\|\frac{dP(s)}{ds}X\right\| + r(s)\|R(s)X\|\right)ds,$$

ori:

$$\lambda(t)\|X\| \leq C_2 + 2\int_{t_0}^{t}\left(\left\|\frac{dP(s)}{ds}\right\| + r(s)\|R(s)\|\right)\|X\|ds. \quad (11)$$

Fie

$$M(T) = \max_{t_0\leq t\leq T<\infty}\|X(t)\|.$$

Pentru orice $t\in[t_0,T]$ e justă inegalitatea (11), atunci ea e justă şi în punctul $T_0\in[t_0,T]$ în care acest maximum este primit. Atunci din (11) avem:

$$\lambda(T_0)M \leq C_2 + 2\int_{t_0}^{T_0}\left(\left\|\frac{dP(s)}{ds}\right\| + r(s)\|R(s)\|\right)Mds,$$

de unde, folosind condiţia 3) a teoremei, obţinem:

$$M(t) \leq \frac{C_2}{\lambda(T_0) - 2\int_{t_0}^{T_0}\left(\left\|\frac{dP(s)}{ds}\right\| + r(s)\|R(s)\|\right)ds} \leq \frac{C_2}{k}.$$

În virtutea faptului că T este arbitrar, justeţea afirmaţiei teoremei este stabilită.
Teorema este demonstrată.

Concluzii

Luând în consideraţie condiţiile stabilite în această lucrare, putem afirma existenţa fenomenului şi comportarea acestuia fără a evidenţia explicit acest fenomen, fapt ce ne permite de „a vedea" rezolvarea de mai departe a problemei.

Bibliografie

1. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1954. – 254 с.

Prezentat la 16.04.2004