CZU: 349.21

APLICAREA CRITERIILOR NUMERICI STATISTICI LA DETERMINAREA PLANULUI OPTIMAL AL ABSOLVENŢILOR

Applying Numerical Criteria Statistics to Determine the Graduates' Optimal Plan

Vitalie ŢÎCĂU,
Universitatea de Stat „Alecu Russo" din Bălţi

Rezumat: *Teoria jocurilor este determinată ca o secţiune a matematicii, care se ocupă cu elaborarea regulilor optimale de comportare din fiecare parte ce participă în conflict. Există un set de reguli specifice care stabilesc mutările posibile ale fiecărui participant şi cîştigurile obţinute. Teoria jocurilor şi-a găsit numeroase aplicaţii în domeniul ştiinţelor sociale, inclusiv în domeniul economiei.*

În lucrare este cercetată aplicarea criteriilor statistici la rezolvarea problemei angajării absolvenţilor în cîmpul de muncă. Fie că în cîmpul de muncă este necesar un număr de absolvenţi. În urma angajării absolvenţilor la întreprinderi, firme sau instituţii de stat, statul obţine un profit. În caz că absolventul nu este angajat în cîmpul de muncă, el este declarat şomer şi statul are o pierdere. Aplicînd criteriile statistice Wald, Laplace, Savvage, Bayes se determină numărul optimal necesar al absolvenţilor.

Cuvinte-cheie: *Modelul matematic, teoria jocurilor, strategii, criterii statistice.*

***Abstract:**: Game theory is determined as a section of mathematics, that deals with the elaboration of optimal reaction rules of each party involved in the conflict. There is a specific set of rules that determine the possible moves of each participant and gains. Game theory has found numerous applications in the social sciences, including in the field of economy. In this paper is researched the application criteria statistics to solve the problem of employment of graduates in the field of employment. In the field of employment is required by a number of graduates. As a result of employment of graduates from enterprises, companies or State institutions, the State obtains a profit. If he is unemployed, the State has a loss. Using statistical criteria Laplace, Wald, Savvage and Bayes, is determined the optimal number of graduates.*

Key-words: *game theory, mathematical model, strategies, statistical criteria.*

Modelarea matematică şi jocurile stohastice. În societatea actuală modelarea matematică reprezintă o necesitate. Noţiunea de model este strîns legată de matematică. Dovada cunoaşterii fenomenelor o constituie măsura în care se reuşeşte prevederea desfăşurării lor, ori, aceasta necesită măsuri cantitative a căror formule şi precizare satisfăcătoare implică folosirea unui model matematic. Pentru a descrie matematic legile de apariţie si dezvoltare a unui fenomen, este necesar să se delimiteze laturile lui esenţiale, cantitative, cărora să li se asocieze ansamblul relaţiilor matematice adecvat fenomenului respectiv [1].

Situaţiile de conflict au generat o clasă foarte importantă de modele matematice – *modelele teoriei jocurilor* [1]. În funcţie de informaţiile pe care le conţin şi pe care le pot oferi, precum şi al interpretării rezultatelor obţinute pe baza lor, modelele se clasifică în două mari grupe: deterministe şi stohastice. *Modelul determinist* se caracterizează prin aceea că parametrii ce definesc procesul modelat sînt cunoscuţi cu precizia necesară garantării valabilităţii rezultatelor.

Jocul este o succesiune de decizii şi evenimente aleatoare, simultane sau nu, care respectă o anumită structură a cîştigului, dată de anumite *reguli de funcţionare* (regulile jocului). Teoria jocurilor se ocupă cu prelucrarea diferitelor recomandări pentru luarea deciziilor în condiţiile situaţiilor de conflict. Situaţia de conflict poate fi interpretată ca un joc dintre 2, 3 şi mai mulţi jucători, fiecare avînd ca scop maximizarea cîştigului său pe contul altui jucător. Totalitatea legilor, care determină în mod unic consecutivitatea de acţiuni ai fiecărei părţi în situaţia de conflict, se numeşte *strategie* [2].

Se presupune că la sfîrşitul partidei fiecare jucător Pi primeşte suma v_i, numită *cîştig*. În majoritatea cazurilor avem *jocuri cu sumă nulă* $v_1+v_2+...+v_n = 0$. Ca exemple de jocuri cu sumă nulă servesc multe probleme economice. Jocurile, în care se activează 2 jucători se numesc *pare*, iar cele cu mai mulţi jucători se numesc *multiple*. Luarea de către jucător a uneia sau alteia decizii pe parcursul jocului şi realizarea ei se numeşte *mişcare*. Dacă mişcarea se face conştient, atunci această mişcare e *mişcare sigură*, iar dacă se face cu ajutorul generatorului de numere aleatoare, atunci e *mişcare întîmplătoare*.

Şahul este un joc între 2 parteneri cu un număr finit de mişcări sigure.

Vom analiza jocuri dintre 2 parteneri cu sumă nulă şi număr finit de mişcări posibile [2]. În funcţie de numărul de strategii, jocurile se împart în *finite*, în care fiecare jucător are un număr finit de strategii şi *infinite*. În funcţie de relaţiile dintre jucători, jocurile se împart în *cooperative*, de *coaliţie* şi *necoaliţionale*. În funcţie de tipul funcţiei cîştigului, jocurile se împart în *matriciale* [1], *bimatriciale*, *continue*, *concave*, *separate* ş. a.

În genere, un joc matricial poate fi dat printr-o matrice dreptunghiulară $m\times n$. Indicele i corespunde numărului strategiei A_i, utilizată de P_1, iar j –corespunde strategiei B_i, utilizată de P_2. Jocul descris în mod unic este determinat de matricea:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}. \tag{1}$$

Fiecare element a_{ij} al matricei este un număr real şi reprezintă suma cîştigului, plătită de jucătorul P_2 lui P_1, dacă P_1 alege strategia, corespunzătoare liniei i, iar P_2 alege strategia, corespunzătoare coloanei j. Jocul matricial, deseori, este descris într-o formă mai extinsă prin matricea de plată (tabelul 1).

Tabelul 1. Matricea de plată

	B_1	...	B_j	...	B_n
A_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...	...
A_i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Fiecare jucător alege pentru sine strategia preferată. Primul jucător alege acea strategie, care-i va aduce cîştig maximal, iar al doilea jucător alege acea strategie, care-i va aduce pierderi minimale.

Prin *preţ inferior sigur* al jocului (maximinimum) se înţelege numărul α:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}. \tag{2}$$

Prin *preţ superior sigur* al jocului (minimaximum) se înţelege numărul β:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}. \tag{3}$$

Într-un joc matricial preţul sigur inferior nu întrece preţul sigur superior [2].

Strategiile jucătorilor, corespunzătoare maximinimumului (minimaximumului) se numesc *maximinime* (*minimaxime*) [2].

Strategia sigură A_i, $i=1,...,m$ a primului jucător A (*strategia sigură* B_j, $j=1,...,n$ a jucătorului al doilea B) este strategia, aleasă de către primul (al doilea) jucător cu probabilitatea, egală cu 1.

Dacă pentru strategiile sigure A_i, B_j respectiv ale jucătorilor A şi B are loc egalitatea $\alpha=\beta$, atunci perechea de strategii sigure (A_i,B_j) se mai numeşte *punct şa* al jocului matricial, iar numărul $v = \alpha = \beta$ – *preţul sigur* al jocului.

Dacă jucătorul A aplică strategia optimală mixtă p^*, iar jucătorul B – orice strategie B_j, atunci cîştigul jucătorului A nu va fi mai mic decît preţul v. În mod analog, dacă jucătorul B aplică strategia mixtă optimală q^*, iar A – orice strategie A_i atunci pierderea jucătorului B nu va depăşi preţul v. Toate strategiile sigure ale jocului ce se conţin în strategia lui optimală se numesc *strategii active* ale jucătorului.

Dacă unul din jucători urmează strategiei mixte optimale proprii, atunci cîştigul lui rămîne neschimbat şi este egal cu preţul jocului independent de strategia aplicată de celălalt jucător, dacă numai acela nu iese din limitele strategiilor active proprii [3].

Criterii de luare a deciziei. Dirijarea proceselor se efectuează prin realizarea unui şir de decizii luate. În cazul lipsei unei informaţii depline apar nedeterminări la luarea deciziei. Cauzele pot fi diferite: informaţia în momentul luării deciziei nu poate fi căpătată; sînt prea mari cheltuielile pentru căpătarea informaţiei etc. [3]. Evident, odată cu modernizarea mijloacelor de prelucrare a informaţiei nedeterminările se vor micşora. Existenţa nedeterminărilor ce nu pot fi lichidate este legată de caracterul aleator al multor evenimente. De exemplu, caracterul aleator al cerinţelor pentru amplasarea absolvenţilor în cîmpul de muncă face imposibilă o pronosticare exactă a numărului de studenţi abiturienţi, care vor absolvi Universitatea peste 3-5 ani.

În scopul micşorării consecinţelor neprielnice, în fiecare caz concret e nevoie de a ţine cont de gradul riscului şi de volumul admisibil de informaţie. Persoana care ia decizia intră în relaţie de joc cu o persoană abstractă, pe care, convenţional, o vom numi *natura*. Cu alte cuvinte, persoana, care ia decizia trebuie să poată găsi decizia gestionară, pe cînd natura nu-şi alege conştient toate strategiile optimale. Asemenea situaţie se numeşte *jocul contra naturii* sau *jocuri stohastice* [3].

Orice activitate a omului poate fi cercetată ca un joc cu natura. În sens larg, prin *natură* se subînţelege totalitatea factorilor nedeterminaţi care acţionează la deciziile luate.

Problema economistului sau persoanei ce ia decizia este luarea celei mai bune decizii gestionare în fiecare situaţie concretă. Calitatea decizii luate depinde de informarea persoanei ce ia decizie despre situaţia, în care se ia decizia.

Jocul statistic reprezintă modelul de bază al teoriei luării deciziei în condiţiile nedeterminărilor parţiale.

Mulţimea stărilor naturii o vom nota prin H, o stare aparte o vom nota prin H_j, $H_j \in H$, $j=1,...,n$. Mulţimile deciziilor (strategiilor) ale participantului o vom nota prin A, o decizie aparte – prin A_i, $A_i \in A$, $i=1,...,m$.

Criteriul Bayes. Pentru *criteriul Bayes* ca indicator serveşte sau mărimea cîştigului mediu, sau mărimea riscului mediu [4]. Matricea de plată $[a_{ij}]_{m\times n}$ este dată în tabelul 2.

Conform criteriului Bayes în calitate de strategii optimale a participantului se ia strategia sigură A_i, pentru care se maximalizează cîştigul mediu a_i^* a participantului, adică se asigură:

$$a_i^* = \max_i a_i^*, \quad (4)$$

unde

$$a_i^* = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \ , \ i=1,...,m. \quad (5)$$

Tabelul 2. Matricea de plată

Strategiile participantului A_i	Stările naturii H_i				Cîştigul mediu
	H_1	H_2	...	H_n	a_i^*
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	a_1^*
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	a_2^*
...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	a_m^*
q_j	q_1	q_2	...	q_n	

Matricea riscurilor este prezentată în tabelul 3.

În calitate de strategie optimală a participantului se aplică strategia sigură A_i, care minimizează riscul mediu, adică se asigură:

$$r^* = \min_i r_i^*, \quad (6)$$

unde

$$r_i^* = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j \ , \ i=1,...,m. \quad (7)$$

Tabelul 3. Matricea riscurilor

Strategiile participantului A_i	Stările naturii Hi				Cîştigul mediu r_i^*
	H_1	H_2	...	H_n	
A_1	r_{11}	r_{12}	...	r_{1n}	r_1^*
A_2	r_{21}	r_{22}	...	r_{2n}	r_2^*
...	...	...	...	...	...
A_m	r_{m1}	r_{m2}	...	r_{mn}	r_m^*
q_j	q_1	q_2	...	q_n	

Criteriul Laplace. Atunci, cînd probabilitatea stărilor naturii sînt justificate pentru evaluarea lor se foloseşte *principiul neajunsului motivelor al lui Laplace*, conform căruia toate stările se presupun egal posibile: $q_1=q_2=...=q_n=1/n$. Optimală se consideră strategia, care asigură un cîştig mediu maximal. Expresia criteriului Laplace este:

$$K_1 = \max_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} U_{ij} \ , \quad (8)$$

unde: n – numărul de stări ale mediului; i – indicele alternativei; j - indicele stării mediului.

Se alege alternativa, pentru care K_1 are valoare maximală. Criteriul Laplace se recomandă de utilizat în cazurile, cînd între stări aparte ale mediului sînt deviaţii mari, adică este mare dispersia dintre valori.

Criteriul maximal al lui Wald coincide cu criteriul alegerii strategiei maximinime, care permite obţinerea preţului inferior sigur α în jocul par cu suma nulă. Conform criteriului Wald în calitate de strategie optimală se aplică strategia sigură, care în cele mai rele condiţii garantează cîştig maximal, adică:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} . \quad (9)$$

Se poate aplica şi *criteriul minimaxim*:

$$\mu = \min_i \max_j a_{ij} . \quad (10)$$

Criteriului riscului minimal al lui Savage recomandă alegerea în calitate de strategie optimală a acelei strategii, pentru care mărimea riscului maximal se minimizează în condiţii cele mai nefavorabile, adică se asigură:

$$\min_i \max_j r_{ij} . \quad (11)$$

Criteriile Wald şi Savage sînt orientate la condiţii cele mai nefavorabile, adică aceste criterii exprimă estimarea pesimistă a situaţiei.

Aplicarea criteriilor statistice la rezolvarea problemei angajării absolvenţilor în cîmpul de muncă. Fie, că în cîmpul de muncă este necesar de n absolvenţi. Oferta anuală pentru persoane, care trebuie angajate în cîmpul de muncă pentru specializarea indicată poate avea valorile: 100, 150, 200, 250 şi 300. În urma angajării absolvenţilor la întreprinderi, firme sau instituţii de stat, statul obţine un profit de 25 unităţi bancare (u.b.). În caz, că absolventul nu este angajat în cîmpul de muncă, el este declarat şomer, şi statul are o pierdere de 10 u.b. De determinat numărul optimal de comandă al absolvenţilor.

Rezolvare. Alcătuim matricea de plată (tabelul 4). Elementul a_{11} pentru situaţia (A_1,H_1) se calculează în modul următor: au finisat studiile 100 de absolvenţi, se angajează 100 de absolvenţi. Cîştigul statului este: $a_{11}= 100 \cdot 25 = 2500$ u.b.

Elementul a_{12} pentru situaţia (A_2,H_2) se calculează astfel: au finisat studiile 100 de absolvenţi, se angajează 150 de absolvenţi. Cîştigul statului ar trebui să fie $150 \cdot 25 = 3750$, însă, deoarece sînt numai 100 de absolvenţi, cîştigul este: $a_{12} = 100 \cdot 25 = 2500$ u.b.

Analogic se determină şi celelalte elemente ale tabelului 4. De exemplu a_{32} pentru situaţia (A_3,H_2): au finisat studiile 200 de absolvenţi, se angajează 100 de absolvenţi. Atunci cîştigul pentru angajarea a 100 de absolvenţi este de $100 \cdot 25 = 2500$ u.b., iar pierderile din cauza neangajării a 100 de absolvenţi este de $100 \cdot 10 = 1000$ u.b. În total cîştigul pentru situaţia (A_3,H_1) este:

$$a_{31} = 100 \cdot 25 - 100 \cdot 10 = 1500 \text{ u.b.}$$

Calculăm cîştigurile medii a_i^*: $a_1^*=2500$; $a_2^* =3575$; $a_3^*=4300$, $a_4^*=4500$, $a_5^*=4175$.

Strategia optimală, după criteriul Bayes, este A_4, deoarece ei îi corespunde cîştigul mediu maximal: $a_3^*=max(2500, 3575, 4300, 4500, 4175)=4500$ *(u.b.)*.

Tabelul 4. Matricea de plată

	100	150	200	250	300
100	2500	2500	2500	2500	2500
150	2000	3750	3750	3750	3750
200	1500	3250	5000	5000	5000
250	1000	2750	4500	6250	6250
300	500	2250	4000	5750	7500

După criteriul Laplace, cînd $q_1=q_2=q_3=q_4=q_5=1/5$, cîştigurile medii sînt: $a_1^* = 2500$, $a_2^* = 3400$, $a_3^* = 3950$, $a_4^* = 4150$, $a_5^* = 4000$.

Deci, conform criteriului Laplace, strategia optimale este A_4, deoarece ea corespunde cîştigului maximal – *4150* u.b.

Conform criteriului Wald, strategia optimală este A_1, pentru care cîştigul atinge valoarea maximală: 2500 u.b. Într-adevăr: $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = max(2500,2000,1500,1000,500) = 2500$.

Conform criteriului Savage, strategia optimale este A_4, pentru care în cel mai rău caz mărimea riscului r capătă valoare minimală: 1500 u.b. Într-adevăr:

$r = \min_i \max_j r_{ij} = min(5000,3750,2500,1500,2000) = 1500$.

Aşadar, în rezultatul rezolvării jocului statistic prin diferite metode, cel mai des se recomandă strategia A_4. Deci, este necesar ca să absolvească Universitatea 250 de studenţi.

În fig. 1 este prezentat exemplul de aplicare a programului.

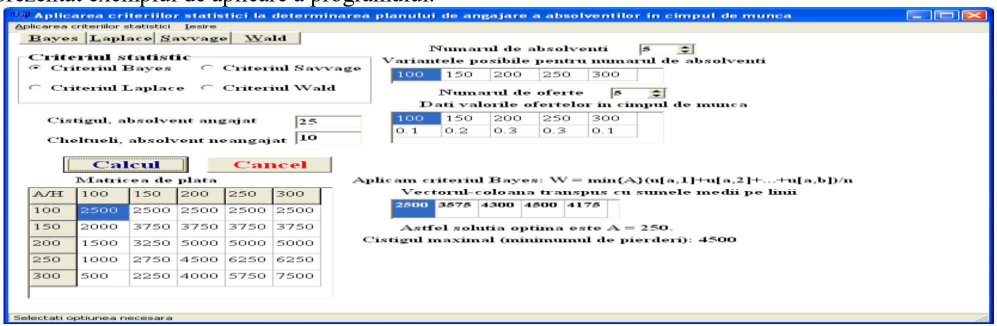

Fig. 1. Aplicarea criteriului Bayes.

Bibliografie:

1. Вентцель, Е.С.; Овчаров, Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. Москва, Наука, 1991.
2. Сухарев, А.Т. Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. Москва, Наука, 1989.
3. Репин, С.В. Математические методы обработки статической информации с помощью ЭВМ. Минск, Университетское, 1990.
4. Иванилов, Ю. П.; Лотов, А. В. Математические методы в экономике. М.: Наука, 1979. 304 с.