Universitatea de Stat ,,Alecu Russo" din Bălţi
Facultatea de Ştiinţe Reale, Economice şi ale Mediului
Catedra de Matematică şi Informatică

Ina D. CIOBANU

GEOMETRIE DIFERENŢIALĂ şi TOPOLOGIE

Note de curs

Balţi, 2016

Notele de curs la *Geometrie diferenţială şi topologie* au fost recomandate pentru plasarea în Biblioteca Ştiinţifică a Universităţii de Stat ,,Alecu Russo" din Bălţi de către

Catedra de matematică şi informatică
(procesul verbal nr. 2 din 27.09.2016)

Şeful Catedrei ____________ conf. univ., dr. Eugeniu Plohotniuc

şi

Consiliul Ştiinţific al Facultăţii de Ştiinţe Reale, Economice şi ale Mediului
(procesul verbal nr. 5 din 20.10.2016)

Decanul Facultăţii ____________ prof. univ., dr. hab. Pavel Topală

Recenzenţi:

1. Mitrofan M. CIOBAN, doctor habilitat în ştiinţe fizico-matematice, profesor universitar, academician - Universitatea de Stat din Tiraspol cu sediul în mun. Chişinău;

2. Iulia DAMIAN, doctor în ştiinţe fizico-matematice, lector superior universitar - Universitatea de Stat ,,Alecu Russo" din Bălţi.

Cuprins

Prefață

Geometria diferenţială şi topologia sunt două compartimente adiacente ale matematicii, unele dintre cele mai tinere şi, în acelaşi timp, cele mai dezvoltate domenii ale matematicii contemporane.

Lucrarea reprezintă note de curs la disciplina ”Geometrie diferenţială şi topologie” şi se adresează studenţilor de la anul III, facultatea Ştiinţe Reale, Economice şi ale Mediului, specialitatea ”Matematică şi Informatică”, dar poate fi utilă tuturor celor ce doresc să se familiarizeze cu unele aspecte ale geometriei diferenţiale şi topologiei.

Notele de curs reprezintă un rezultat al activităţii autorului sub tutela academicianului Mitrofan M. Cioban (Universitatea de Stat din Tiraspol cu sediul în mun. Chişinău) şi, în acelaşi timp, se bazează pe lucrările celor mai valoroşi specialişti în domeniu.

Modulul I.
GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ

Introducere

1. Obiectele de studiu ale geometriei diferențiale și topologiei

Geometria diferenţială este o ramură a matematicii care combină geometria analitică cu analiza matematică. Geometria diferenţială studiază curbele şi suprafeţele cu mijloacele analizei, în special prin calculul diferenţial şi integral. Caracteristica geometriei diferenţiale constă în faptul că studierea şi cercetarea proprietăţilor curbelor şi suprafeţelor se efectuiază pe porţiuni foarte mici prin metoda analizei infiniţilor mici. Geometria diferenţială îşi începe studiul din punctul în care ecuaţiile curbelor şi ale suprafeţelor sunt cunoscute. Văzută din acest unghi poate fi considerată o continuare a geometriei analitice.

Constituită ca ştiinţă la mijlocul secolului XIX-lea, geometria diferenţială se află în continuă dezvoltare. Fondatorii acestei ştiinţe sunt: Leibniz, Euler, Monge, Gauss. Contribuţii au avut de asemenea: Schouten, Darboux, Cartan, Fubini, Lobacevski, Bolyai, Beltrami, Klein, Poincare, Riemann şi alţii.

Primul geometru român, ale cărui lucrări de geometrie diferenţială s-au impus atenţiei matematicienilor din întreaga lume, este Gh.Ţiţeica (1873-1939). Deoarece el a introdus şi a studiat o clasă de curbe şi una de suprafeţe, care astăzi îi poartă numele, el este considerat unul dintre creatorii geometriei centro-afine.

Un loc proeminent între geometrii români, îl ocupă academicianul G. Vrânceanu, creator al teoriei spaţiilor neolonome şi al unei teorii unitare relativiste, care a adus contribuţii importante în aproape toate ramurile geometriei diferenţiale moderne.

Topologia este o ramură a matematicii, mai precis o extensie a geometriei, care studiază deformările spaţiului prin transformări continue. În sens mai larg, topologia descrie relaţiile spaţiale existente între obiecte folosind seturi de reguli pentru a observa cum entităţile vectoriale (puncte, linii, poligoane) împărtăşesc geometria şi spaţiul. Topologia se deosebeşte de geometria euclidiană prin modul de considerare a echivalenţei dintre obiecte.

În 1736, matematicianul Leonhard Euler a publicat lucrarea intitulată ”Problema celor şapte poduri de la Königsberg, despre care se poate spune că stă la baza acestei ramuri matematice. Termenul topologie este introdus de Johann Benedict Listing în 1847.

La dezvoltarea topologiei au contribuit: Cantor, Poincare, Hadamard, Ascoli, Frechet, Hausdorff, Arhanghelski, Cioban.

În notele date de curs sunt prezentate, pe parcursul a patru unităţi de conţinut, rezultate clasice din geometrie diferenţială şi topologie.

Cursul ”Geometrie diferenţială şi topologie” joacă un rol important în cadrul pregătirii profesorilor de matematică. Sunt importante aplicaţiile Geometriei diferenţiale şi Topologiei în:

- fizica teoretică (spaţiile Riemann şi teoria relativităţii, optica);
- mecanica teoretică (studiul traiectoriilor);
- teoria ecuaţiilor diferenţiale (soluţii speciale);
- geografie, geodezie, cartografie (curbe de nivel);
- grafica computaţională (curbe Bezier, curbe spline);
- economie (curba cererii, curba costului);
- psihologie (curba învăţării, curba uitării) etc.

În predarea acestui curs:

- în primul rînd, se concretizează noţiunile de bază şi modul de definire a acestora;
- se concretizează materialul teoretic studiat la contact direct şi individual;
- se aleg diverse probleme cu caracter aplicativ pentru seminare;
- se alcătuiesc teste pentru evaluarea continuă şi finală a cunoştinţelor.

2. Funcţia vectorială de argument scalar

Curbele şi suprafeţele mai comod se definesc cu ajutorul funcţiilor ce primesc valori vectoriale sau funcţii vectoriale de argument scalar (vector-funcţii). Vom aplica noţiunile de bază ale analizei matematice pentru funcţii vectoriale de argument scalar.

Fie G o mulţime arbitrară de puncte de pe o dreaptă, plan sau spaţiu.

Definiţia 1. *Vom spune, că pe mulţimea G este definită vector-funcţia $\mathbf{r}$, dacă fiecărui punct $t \in G$ i se pune în corespondenţă vectorul $\mathbf{r}(t)$.*

Pentru vector-funcţii, asemenea funcţiilor scalare în analiza matematică, se introduce noţiunea de limită.

Definiţia 2. *Vom spune, că $\mathbf{r}(t) \to a$ pentru $t \to t_0$, dacă $|\mathbf{r}(t) - a| \to 0$ pentru $t \to t_0$.*

Pentru vector-funcţii sunt juste teoremele despre limită, analogice teoremelor despre limită pentru funcţii scalare. Demonstraţiile acestor afirmaţii nu se deosebesc esenţial de demonstraţiile afirmaţiilor respective pentru funcţii scalare în analiza matematică.

Pentru funcţiile vectoriale vom introduce noţiunea de continuitate asemenea funcţiilor scalare.

Definiţia 3. *Funcţia $\mathbf{r}(t)$ se numeşte continuă în punctul t_0, dacă*

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)| \to 0$$

pentru $t \to t_0$.

Fie $\mathbf{r_1}(t)$ şi $\mathbf{r_2}(t)$ - vector-funcţii continue în punctul t_0, iar $\lambda(t)$ - funcţie scalară continuă în acest punct. Atunci vector-funcţiile $\lambda(t)\mathbf{r_1}(t)$, $\mathbf{r_1}(t) \pm \mathbf{r_2}(t)$, $\mathbf{r_1}(t) \times \mathbf{r_2}(t)$, $\mathbf{r_1}(t) \cdot \mathbf{r_2}(t)$ sunt continue în punctul t_0.

Această proprietate de continuitate este o consecinţă a proprietăţilor limitei.

Definiţia 4. *Fie $\mathbf{r}(t)$ - vector-funcţia definită pe un segment. Vom spune, că vector-funcţia $\mathbf{r}(t)$ are în punctul t al segmentului derivată, dacă există limita raportului*

$$\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}$$

pentru $h \to 0$. Derivata în punctul t se notează $\mathbf{r}^{'}(t)$ (figura 0.1).

Dacă $\mathbf{r_1}(t)$ şi $\mathbf{r_2}(t)$ - vector-funcţii diferenţiabile în punctul t, iar $\lambda(t)$ - funcţie scalară diferenţiabilă în acest punct, atunci vector-funcţiile $\lambda(t)\mathbf{r_1}(t)$, $\mathbf{r_1}(t) \pm \mathbf{r_2}(t)$, $\mathbf{r_1}(t) \times \mathbf{r_2}(t)$, $\mathbf{r_1}(t) \cdot \mathbf{r_2}(t)$ sunt diferenţiabile în punctul t, şi în plus au loc următoarele reguli de diferenţiere:

$$\begin{gathered}
(\lambda \mathbf{r_1})^{'} = \lambda^{'} \mathbf{r_1} + \lambda \mathbf{r_1}^{'}, \\
(\mathbf{r_1} \pm \mathbf{r_2})^{'} = \mathbf{r_1}^{'} \pm \mathbf{r_2}^{'}, \\
(\mathbf{r_1} \times \mathbf{r_2})^{'} = \mathbf{r_1}^{'} \times \mathbf{r_2} + \mathbf{r_1} \times \mathbf{r_2}^{'}, \\
(\mathbf{r_1} \cdot \mathbf{r_2})^{'} = \mathbf{r_1}^{'} \cdot \mathbf{r_2} + \mathbf{r_1} \cdot \mathbf{r_2}^{'}.
\end{gathered}$$

Derivata vector-funcţiei $\mathbf{r}^{'}(t)$ se numeşte *derivata a doua* a funcţiei $\mathbf{r}(t)$ şi se notează $\mathbf{r}^{''}(t)$. Analogic se defineşte derivata a treia, a patra etc.

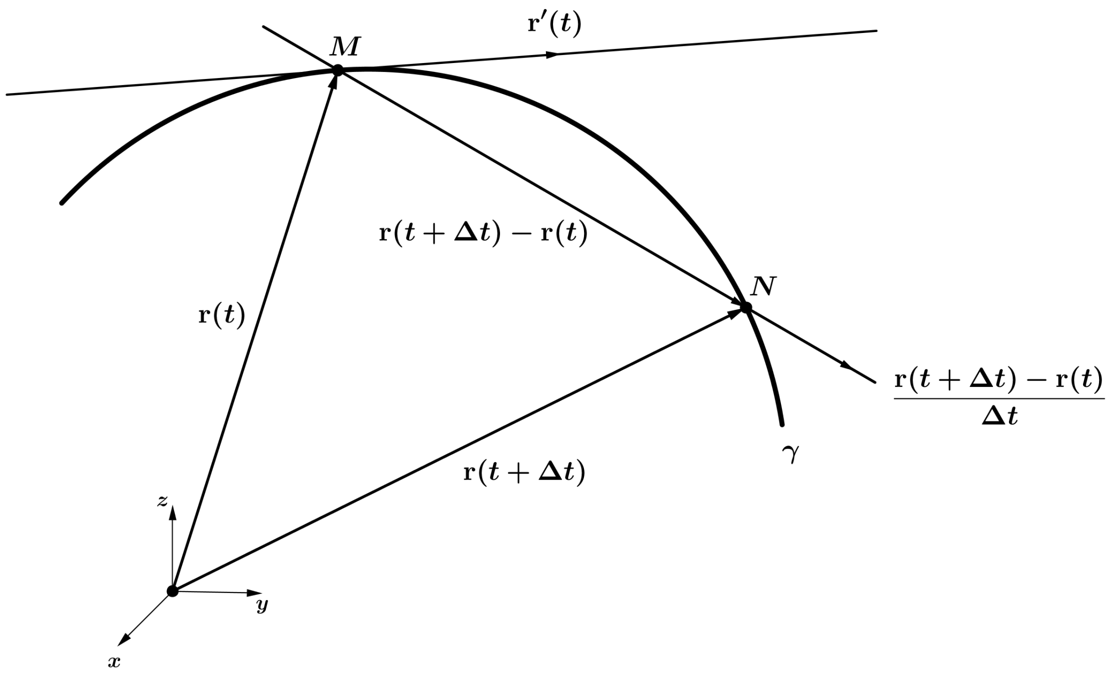


Figura 0.1: Sensul geometric al derivatei funcţiei vectoriale

Funcţia $\mathbf{r}(t)$, ce are derivate continue pînă la ordinul k inclusiv pe segmentul (a, b) se numeşte *funcţie de k ori diferenţiabilă* pe acest segment.

Fie $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ - trei vectori unitari, ce nu sunt situaţi în acelaşi plan. Fiecare vector $\mathbf{r}(t)$ admite reprezentarea sub forma:

$$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2} + z\mathbf{e_3},$$

numerele x, y, z se determină univoc şi se numesc *coordonatele* vectorului $\mathbf{r}(t)$ în raport cu baza $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$.

În particular,

$$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Fie $\mathbf{r}(t)$ - vector-funcţia definită pe un segment. Să determinaăm trei funcţii scalate $x(t), y(t), z(t)$ prin condiţia

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Atunci, în cazul în care funcţiile $x(t), y(t), z(t)$ sunt continue sau diferenţiabile, atunci funcţa vectorială $\mathbf{r}(t)$ este continuă, respectiv diferenţiabilă. Invers, dacă vector-funcţia $\mathbf{r}(t)$ este continuă sau diferenţiabilă, atunci funcţiile $x(t), y(t), z(t)$ sunt continue, respectiv diferenţiabile.

Remarcă. *Definirea parametrică a curbei prin ecuaţiile*

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

este echivalentă cu definirea printr-o singură ecuaţie vectorială

$$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

unde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ *sunt vectori unitari, reciproc ortogonali cîte doi, cu direcţiile axelor* Ox, Oy, Oz *respectiv.*

Pentru funcţii vectoriale are loc formula Taylor, şi anume, dacă $\mathbf{r}(t)$ este funcţie de n ori diferenţiabilă, atunci

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta t \mathbf{r}'(t) + \ldots \tfrac{\Delta t^n}{n!}(\mathbf{r}^{(n)}(t) + \varepsilon(t, \Delta t)),$$

unde $|\varepsilon(t, \Delta t)| \to 0$ pentru $\Delta t \to 0$.

Noţiunea de integrală Riemann pentru o funcţie vectorială se introduce ca şi în cazul funcţiei scalare. Integrala vector-funcţiei posedă proprietăţi obişnuite.

Unitatea de conţinut I. TEORIA CURBELOR

Noţiunea de curbă este una din noţiunile fundamentale cercetate în geometria diferenţială.

1. Noţiune de curbă

1.1. Curbă elementară

Pentru a defini noţiunea de curbă ne vom referi la aplicaţiile unei mulţimi arbitrare de puncte în spaţiu.

Definiţia 1.1. *Fie M - o mulţime arbitrară de puncte din spaţiu. Vom spune, că este dată aplicaţia f a mulţimii M în spaţiu, dacă fiecărui punct $x \in M$ i se pune în corespondenţă un punct $f(x)$ din spaţiu.*

Punctul $f(x)$ al spaţiului se numeşte *imaginea punctului* $x \in M$. Mulţimea punctelor $f(M)$, alcătuită din imaginile tuturor punctelor mulţimii M, se numeşte *imaginea mulţimii* M.

Definiţia 1.2. *Aplicaţia f a mulţimii M se numeşte injectivă, dacă imaginile punctelor diferite sunt diferite.*

Fie f - o aplicaţie injectivă. Atunci, într-un mod evident, se defineşte aplicaţia f^{-1} a mulţimii $f(M)$, la care punctului $f(x)$ i se pune în corespondenţă punctul x. Această aplicaţie se numeşte *aplicaţie inversă pentru f.*

Definiţia 1.3. *Aplicaţia f a mulţimii M se numeşte continuă, dacă*

$$(\forall x \in M), (\forall \varepsilon > 0), (\exists \delta > 0) : (\forall y \in M : \rho(x, y) < \delta) :$$

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Definiţia 1.4. *Fie f - o aplicaţie injectivă şi continuă a mulţimii M. Dacă aplicaţia f^{-1} a mulţimii $f(M)$ de asemenea este continuă, atunci f se numeşte aplicaţie topologică.*

În acest caz, mulţimea M şi imaginea ei $f(M)$ la aplicaţia topologică f se numesc *omeomorfe* sau *topologic echivalente.*

Să definim curba elementară.

Definiţia 1.5. *Mulţimea γ de puncte din spaţiu se numeşte curbă elementară, dacă această mulţime este imaginea segmentului deschis de dreaptă la aplicaţia topologică a acestuia în spaţiu.*

1.2. Curbă plană simplă

Definiţia 1.6. *Mulţimea G de puncte spaţiale se numeşte deschisă, dacă $\forall x \in G$ putem indica numărul $\varepsilon > 0$ a.î. toate punctel y din spaţiu cu $\rho(x, y) < \varepsilon$ ne dau $y \in G$.*

Este evident, că totalitatea mulţimilor deschise este o mulţime deschisă.

Definiţia 1.7. *Vom numi vecinătatea punctului x din spaţiu orice mulţime deschisă ce conţine acest punct. (sfera)*

Definiţia 1.8. *Mulţimea M de puncte din spaţiu se numeşte conexă, dacă nu există mulţimile deschise $G^{'}$, $G^{''}$ care descompun M în două părţi $M^{'}$, $M^{''}$, una dintre care ar apaţine numai lui $G^{'}$, iar cealaltă - numai lui $G^{''}$. (mulţimi conexe de puncte pe dreapta $\mathbb{R}$ - segment, semisegment, interval, semidreaptă deschisă sau închisă, dreaptă)*

Vom defini curba simplă.

Definiţia 1.9. *Mulţimea γ de puncte din spaţiu se numeşte curbă simplă, dacă această mulţime este conexă şi orice punct x al ei posedă o astfel de vecinătate în care partea curbei γ situată în ea să fie o curbă elementară.*

Construcţia curbei simple în întregime se face mai clară din următoarea afirmaţie.

Teorema 1.1. *Imaginea unui segment deschis sau a unui cerc la aplicaţia topologică în spaţiu este o curbă simplă.*

Invers, orice curbă simplă este imaginea unui segment deschis sau a unui cerc la aplicaţia topologică în spaţiu.

Astfel Teorema 1.1 exprimă următoarea proprietate: Curba simplă este omeomorfă unui segment deschis sau unui cerc.

Fie funcţiile $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sunt continue pe segmentul $[\alpha, \beta]$.

Definiţia 1.10. *Fie mulţimea γ a punctelor $M(x, y)$ (figura 1.1), coordonatele cărora se determină de egalităţile*

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta. \tag{1.1}$$

Mulţimea γ se numeşte curbă plană simplă, dacă pentru diferite valori ale parametrului $t \in [\alpha, \beta]$ primim diferite puncte din mulţimea γ.

Dacă vom considera parametrul t o mărime fizică - timpul, atunci curba plană simplă poate fi imaginată drept traectoria unui punct ce se mişcă pe plan, şi în plus această traectorie nu are puncte de autointersecţie şi puncte de autosuprapunere.

Punctele $M(x, y)$, coordonatele cărora se determină cu egalităţile (1.1), se numesc *punctele curbei* γ. Punctele A şi B, ce corespund valorilor limită α şi β ale parametrului t, se numesc *puncte limită* ale curbei γ.

Exemplu de curbă plană simplă este graficul unei funcţii $y = f(x)$ continue pe segmentul $[\alpha, \beta]$. Acest grafic este mulţimea punctelor M, coordonatele cărora x, y se determină din relaţiile $x = t, y = f(t), \alpha \leq t \leq \beta$. Este evident, că pentru diferite valori ale parametrului t primim diferite puncte de pe grafic.

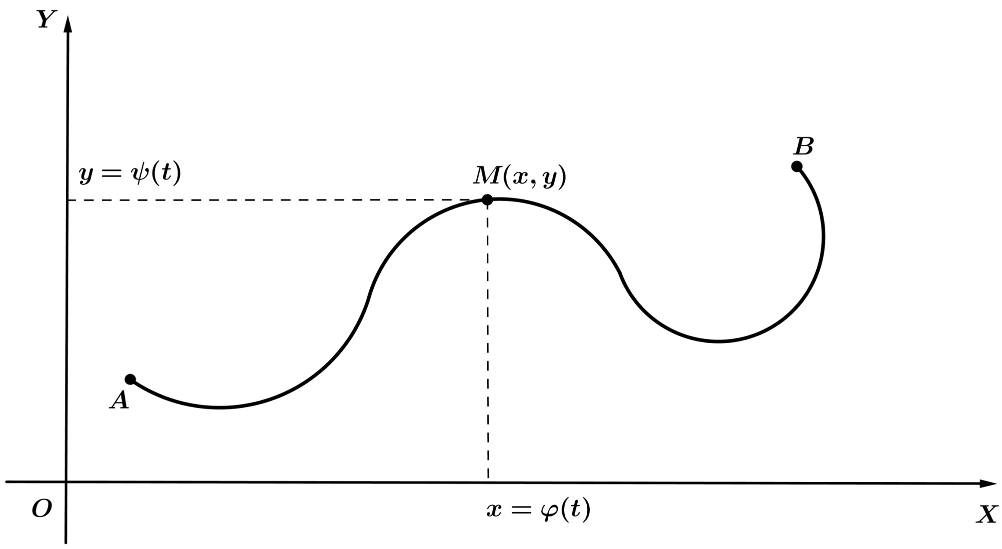


Figura 1.1: Traectoria punctului $M(x, y)$

Remarca 1.1. *Una şi aceeaşi curbă simplă poate fi parametrizată prin diferite metode.*

Remarca 1.2. *Importantă este noţiunea de curbă plană simplă închisă.*

Fie γ_1 şi γ_2 două curbe plane simple astfel, încît:

1. *fiecare din punctele limită ale curbei γ_1 coincide cu unul din punctele limită ale ale curbei γ_2;*

2. *orice puncte ne limită ale curbelor γ_1 şi γ_2 sunt distincte.*

Mulţimea γ, obţinută prin reuniunea curbelor γ_1 şi γ_2, se numeşte curbă plană simplă închisă.

Curba plană simplă închisă de asemenea poate fi parametrizată cu ajutorul relaţiilor de tipul (1.1) (figura 1.2).

Curba simplă omeomorfă unui cerc se numeşte *închisă*.

1.3. Curbe plane definite parametric

Originea acestei metode de definire a curbelor este reprezentarea curbei ca o totalitate de poziţii consecutive de mişcare a unui punct.

Să studiem cîteva exemple.

Exemplul 1.1. *Totalitatea poziţiilor consecutive ale punctului $M(x, y)$, ce se mişcă pe plan la schimbarea parametrului t dela $-\infty$ pîna la $+\infty$ conform legei*

$$x = a\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},\ y = at\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},\ a > 0,$$

reprezintă o curbă, numită strofoida (figura 1.3, figura 1.4).

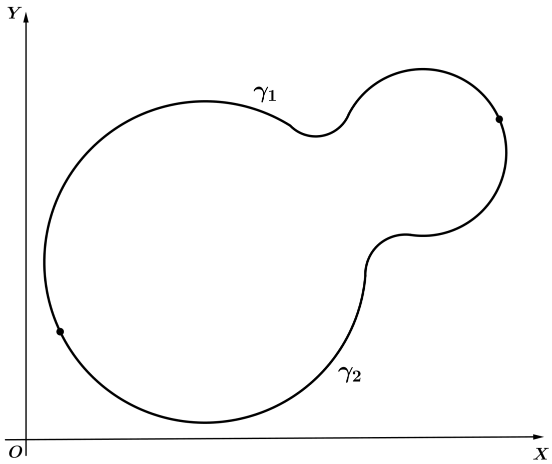


Figura 1.2: Curbă plană simplă închisă

Definiţia 1.11. *Vom spune, că relaţiile*

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in \{t\} \tag{1.2}$$

reprezintă ecuaţiile parametrice ale curbei plane γ, dacă există o partiţie $\mathfrak{D}$ a domeniului $\{t\}$ în segmente parţiale $[t_i, t_{i+1}]$, încît la schimbarea parametrului t pe fiecare astfel de segment relaţiile (1.2) definesc o curbă simplă plană. Curba γ, în cazul dat, reprezintă reuniunea curbelor simple indicate (ţinînd cont de autointersecţiile şu auto suprapunerile posibile) cu condiţia schimbării monotone a parametrului t pe mulţimea $\{t\}$.

În acelaşi timp, se spune, că curba γ este definită parametric cu ajutorul relaţiilor (1.2).

Exemplul 1.2. *Relaţiile*

$$x = e^{-t} cost,\ y = 0,\ 0 \leq t < +\infty$$

reprezintă o curbă definită parametric.

1.4. Curbe spaţiale

Definiţia 1.12. *Mulţimea γ de puncte M din spaţiu, coordonatele x, y, z ale cărora se determină de egalităţile*

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), \alpha \leq t \leq \beta, \tag{1.3}$$

unde $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ - funcţii continue pe segmentul $[\alpha, \beta]$, se numeşte curbă spaţială simplă, dacă pentru diferite valori ale parametrului $t \in [\alpha, \beta]$ primim diferite puncte din mulţimea γ.

Relaţiile (1.3) se numesc *ecuaţiile parametrice* ale curbei spaţiale.

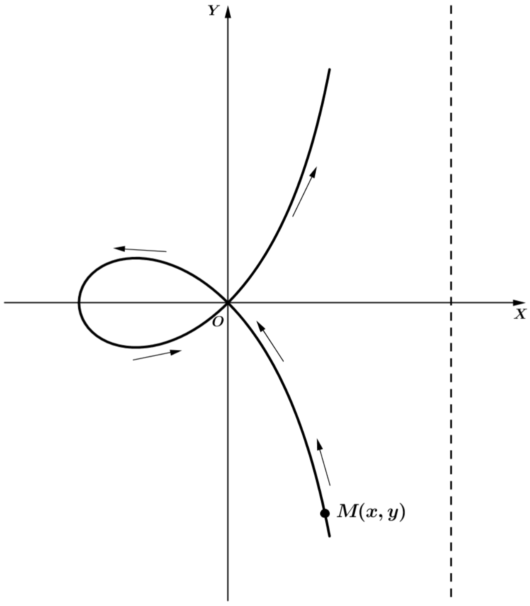


Figura 1.3: Strofoida: este indicată ordinea trecerii curbei

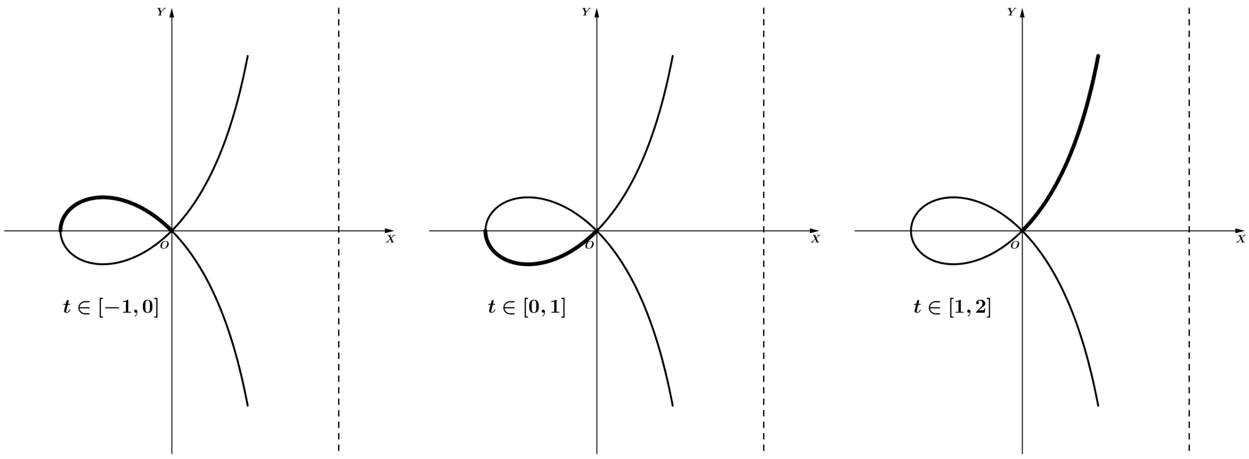


Figura 1.4: Porţiunile simple ale strofoidei

1.5. Curba ca godograful funcţiei vectoriale

Fie $\{t\}$ - o mulţime conexă de puncte pe dreapta $\mathbb{R}$ (segment, semisegment, interval, semidreaptă deschisă sau închisă, dreaptă).

Cunoaştem, că pe mulţimea $\{t\}$ este definită funcţia vectorială $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, dacă fiecărei valori $t \in \{t\}$ după o regulă bine determinată i se pune în corespondenţă vectorul $\mathbf{r}(t)$. Dacă vom depune toţi vectorii din originea de coordonate, atunci la schimbarea parametrului t pe mulţimea $\{t\}$, extremitatea M a vectorului $\mathbf{r}(t)$ va descrie o mulţime M, care se numeşte *godograful* funcţiei vectoriale $\mathbf{r}(t)$ (figura 1.5).

1.6. Curbă generală

Definiţia 1.13. *Partea comună a curbei γ şi a unei vecinătăţi a punctului X din spaţiu se numeşte vecinătatea punctului X pe curba simplă γ (figura 1.6).*

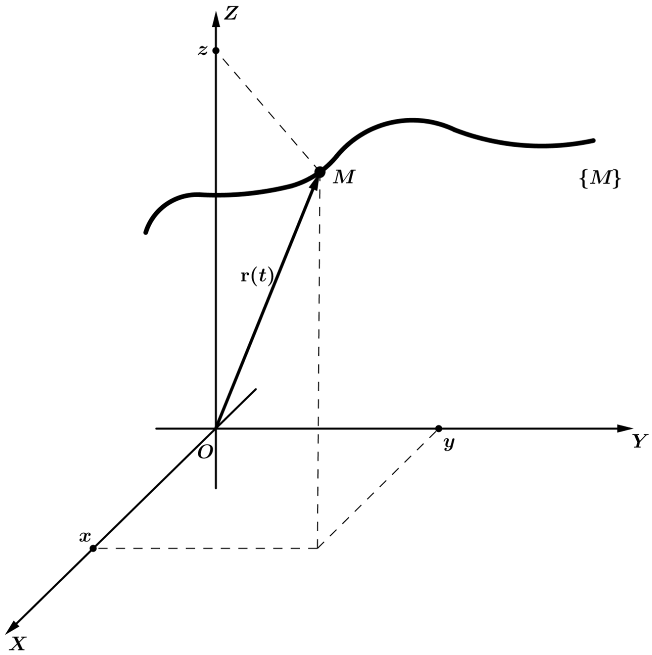


Figura 1.5: Godograful funcţiei vectoriale

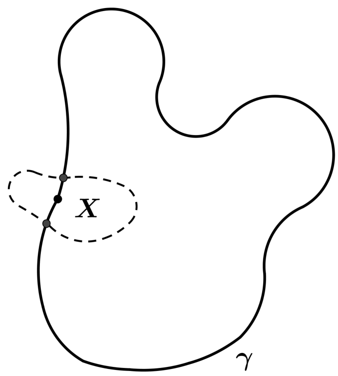


Figura 1.6: Vecinătatea punctului pe curbă simplă

Conform definiţiei, orice punct al curbei simple posedă o astfel de vecinătate, care reprezintă curba elementară. În continuare, vorbind despre vecinătatea punctului pe curbă, vom avea în vedere vecinătea elementară a lui.

Definiţia 1.14. *Aplicaţia f a mulţimii M în spaţiu se numeşte local topologică, dacă fiecare punct al acestei mulţimi posedă o astfel de vecinătate, în care aplicaţia f este topologică.*

Să definim curba generală.

Definiţia 1.15. *Mulţimea γ de puncte spaţiale se numeşte curbă generală, dacă această mulţime reprezintă imaginea curbei simple la aplicaţia local topologică a ei în spaţiu.*

Vom spune, că aplicaţia f_1 a curbei simple γ_1 şi aplicaţia f_2 a curbei simple γ_2 definesc una şi aceeaşi curbă generală γ, dacă între punctele curbelor γ_1, γ_2 poate fi stabilită o corespondenţă topologică, la care imaginile punctelor corespunzătoare curbelor date pe curba γ coincid.

Exemplul 1.3. *În figura 1.7 avem o curbă generală, care poate fi reprezentată ca imaginea unui cerc la aplicaţia local topologică prin două metode.*

Fie punctul se mişcă pe cerc, atunci imaginea lui se mişcă pe curbă. Punctul-imagine - $1, 2, 3, 4, 2, 5$ *sau* $1, 2, 4, 3, 2, 5$. *Imaginile - curbe generale diferite, însă ca mulţimi de puncte - coincid.*

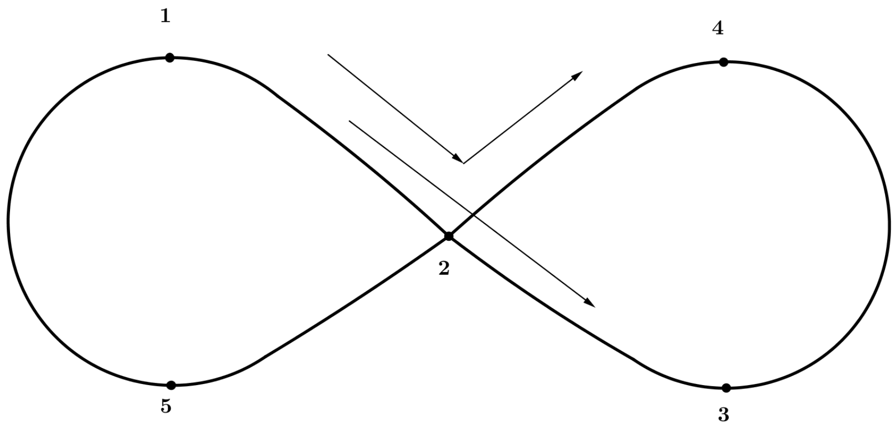


Figura 1.7: Curbă generală

Fie curba generală γ este imaginea curbei simple $\bar{\gamma}$ la aplicaţia f local topologică în spaţiu. Vecinătatea punctului $f(x)$ pe curba γ va fi imaginea oricărei vecinătăţi a punctului $x \in \bar{\gamma}$ la aplicaţia f. deoarece aplicaţia f în vecinătatea destul de mică a punctului x este topologică, atunci $f(x)$ are pe γ vecinătatea, ce reprezintă curba elementară.

Astfel, cercetarea oricărei curbe pe porţiuni mici, se reduce la studierea curbei elementare.

2. Curbă regulată. Metode de definire analitică a curbelor

Definiţia 1.16. *Curba γ se numeşte regulată (de k ori diferenţiabilă), dacă fiecare punct al acestei curbe posedă o astfel de vecinătate, care admite parametrizare regulată, adică definirea prin ecuaţiile în formă parametrică (1.3):*

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t),$$

unde $f_1,\ f_2,\ f_3$ - funcţii regulate (de k ori diferenţiabile).

Pentru $k = 1$ curba se numeşte *netedă*.

Definiţia 1.17. *Curba γ se numeşte analitică, dacă în vecinătatea suficient de mică a fiecărui punct al său, această curbă admite parametrizare analitică (funcţiile $f_1,\ f_2,\ f_3$ - analitice).*

În continuare vom cerceta numai curbele regulate.

Din tema precedentă cunoaştem, că o curbă în vecinătatea fiecărui punct al său poate fi definită prin ecuaţiile în formă parametrică (1.3):

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

unde $x(t), y(t), z(t)$ - funcţiile definite pe intervalul $\alpha < t < \beta$.

Este evidentă întrebarea, cînd sistemul de egalităţi

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ (\alpha < t < \beta)$$

defineşte curba regulată, adică cînd aceste egalităţi pot fi cercetate ca ecuaţiile unei curbe?

Răspuns la această întrebare ne dă următoarea teoremă.

Teorema 1.2. *Dacă $x(t), y(t), z(t)$ - funcţiile regulate, ce satisfac condiţia*

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0\ (\alpha < t < \beta),$$

atunci sistemul de egalităţi

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ (\alpha < t < \beta)$$

reprezintă ecuaţiile unei curbe γ. Această curbă este imaginea segmentului deschis $\alpha < t < \beta$ la aplicaţia local topologică, care punctului t a segmentului îi pune în corespondenţă punctul spaţial cu coordonatele $x(t), y(t), z(t)$.

Demonstraţie.

Vom demonstra numai că aplicaţia locală din teoremă este univocă.

Dacă afirmaţia nu este justă, atunci exisă t_0, în vecinătatea oricît de mică a căruia putem indica t_1 şi t_2 $(t_1 \neq t_2)$ astfel, încît

$$x(t_1) - x(t_2) = 0,\ y(t_1) - y(t_2) = 0,\ z(t_1) - z(t_2) = 0.$$

Conform teoremei despre valoarea medie, primim:

$$x'(\xi_1) = 0,\ y'(\xi_2) = 0,\ z'(\xi_3) = 0,$$

unde ξ_1, ξ_2, ξ_3 sunt cuprinse între t_1 şi t_2. Deoarece t_1 şi t_2 sunt situate oricît de aproape de t_0, atunci după continuitatea funcţiilor $x'(t), y'(t), z'(t)$ avem:

$$x'(t_0) = 0,\ y'(t_0) = 0,\ z'(t_0) = 0$$

şi, prin urmare

$$x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0) = 0.$$

Am ajuns la contrazicere. Afirmaţia este demonstrată. □

Unele curbe la alegerea convenabilă a axelor de coordonate $x,\ y,\ z$ admit parametrizarea de tipul

$$x = t,\ y = \varphi(t),\ z = \psi(t)\ (\alpha < t < \beta)$$

sau

$$y = \varphi(x),\ z = \psi(x)\ (\alpha < x < \beta).$$

Această parametrizare în majoritatea cazurilor este foarte convenabilă. În legătură cu aceasta apare întrebarea: Cînd curba admite astfel de parametrizare, cel puţin pe porţiuni foarte mici?

Teorema 1.3. *Fie γ - curbă regulată,*

$$x = f_1(t), y = f_2(t),\ z = f_3(t),\ (\alpha < x < \beta)$$

parametrizarea ei regulată în vecinătatea punctului (x_0, y_0, z_0) ce corespunde parametrului $t = t_0$. Fie în acest punct $f_1^{'}(t) \neq 0$. Atunci în vecinătatea suficient de mică a punctului t_0 curba γ poate fi definită de ecuaţiile:

$$y = \varphi(x),\ z = \psi(x),$$

unde φ şi ψ - funcţiile regulate în raport cu variabila x.

În continuare vom cerceta definirea implicită a curbei, şi pentru simplitate ne vom limita cu curbele plane (ce aparţin unui plan, în particular planului Oxy).

Definiţia 1.18. *Vom spune, că curba plană este definită de ecuaţia*

$$\varphi(x, y) = 0,$$

exprimînd prin aceasta doar faptul că coordonatele punctelor curbei satisfac ecuaţia dată.

Teorema 1.4. *Fie $\varphi(x, y)$ - o funcţie regulată în raport cu variabilele x şi y. Fie M - mulţimea punctelor planului Oxy, ce satisfac ecuaţia*

$$\varphi(x, y) = 0;$$

(x_0, y_0) - punctul acestei mulţimi, în care ${\varphi_x}^2 + {\varphi_y}^2 \neq 0$. Atunci punctul (x_0, y_0) posedă astfel de vecinătate, încît toate punctele ce aparţin ei ale mulţimii M alcătuiesc o curbă elementară regulată.

Teorema 1.5. *Fie $\varphi(x, y, z)$ şi $\psi(x, y, z)$ - o funcţie regulată în raport cu variabilele x, y, z. Fie M - mulţimea punctelor spaţiale, ce satisfac ecuaţiile*

$$\varphi(x, y, z) = 0,\ \psi(x, y, z) = 0,$$

(x_0, y_0, z_0) - punctul acestei mulţimi, în care rangul matricei

$$\begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{pmatrix}$$

este egal cu 2. Atunci punctul (x_0, y_0, z_0) posedă astfel de vecinătate, încît toate punctele ce aparţin ei ale mulţimii M alcătuiesc o curbă elementară regulată.

3. Tangenta, normala, planul normal la o curbă

Fie dată curba plană (spaţială) γ, $P \in \gamma$. Ducem prin punctul P o dreaptă g şi $Q \notin g$, $Q \in \gamma$. Notăm $h = \rho(Q,\ g)$, $d = \rho(Q,\ P)$ (figura 1.8).

Definiţia 1.19. *Dreapta g se numeşte tangentă la curba plană (spaţială) γ în punctul P, dacă*

$$\lim_{Q \to P} \frac{h}{d} = 0.$$

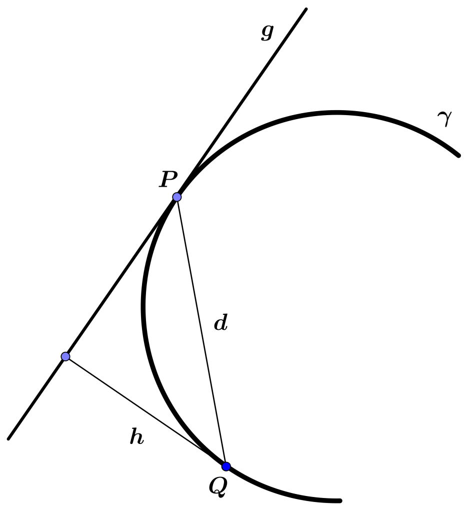


Figura 1.8: Tangenta la o curbă

Teorema 1.6. *Curba netedă γ are în orice punct al său o singură tangentă.*

Dacă ecuaţia vectorială a curbei γ este

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

atunci vectorul director al tangentei coincide cu $\mathbf{r}'(t)$ (t - valoarea parametrului în punctul P.)

Demonstraţie. Presupunem, că în punctul P, ce corespunde valorii parametrului t, curba γ are tangenta g. $\vec{\tau}$ - vector director al tangentei g ($|\vec{\tau}| = 1$).

Ecuaţia vectorială a curbei γ este $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Dăm parametrului t o creştere arbitrară Δt, obţinem $t + \Delta t$. Avem un punct nou Q, cărui îi corespunde raza vectoare $\mathbf{r}(t + \Delta t)$.

$$d = \rho(Q, P) = |\Delta\mathbf{r}(t)| = |\Delta\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)|\,.$$

$$h = |[\Delta\mathbf{r}, \vec{\tau}]| \Rightarrow h = |\Delta\mathbf{r}| \cdot |\vec{\tau}| \cdot sin\alpha.$$

Astfel

$$\frac{h}{d} = \frac{|[\Delta\mathbf{r}, \vec{\tau}]|}{|\Delta\mathbf{r}(t)|} = \frac{|\Delta\mathbf{r}| \cdot |\vec{\tau}| \cdot sin\alpha}{|\Delta\mathbf{r}(t)|} = sin\alpha \to 0$$

(cînd $\alpha \to 0$ sau $Q \to P$).

Dar

$$\frac{h}{d} = \frac{|[\Delta\mathbf{r}, \vec{\tau}]|}{|\Delta\mathbf{r}(t)|} = \frac{\frac{|[\Delta\mathbf{r}, \vec{\tau}]|}{|\Delta t|}}{\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{|\Delta t|}} = \frac{\left|\left[\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t},\ \vec{\tau}\right]\right|}{\left|\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right|} \to \frac{\left|\left[\mathbf{r}'(t),\ \vec{\tau}\right]\right|}{|\mathbf{r}'(t)|},\ \Delta t \to 0$$

De aici

$$\left[\mathbf{r}'(t),\ \vec{\tau}\right] = 0.$$

Iar aceasta are loc numai în cazul cînd $\vec{\tau}$ are direcţia vectorului $\mathbf{r}'(t)$. Deci, dacă tangenta există, atunci ea are direcţie vectorului $\mathbf{r}'(t)$ şi, prin urmare, este unică.

Faptul, că dreapta g trece prin punctul P şi are direcţia vectorului $\mathbf{r}'(t)$, este tangentă, de asemenea este just deoarece

$$\frac{h}{d} = \frac{\left|\left[\mathbf{r}'(t),\ \vec{\tau}\right]\right|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\left|\left[\mathbf{r}'(t),\ \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\right]\right|}{|\mathbf{r}'(t)|} \to \frac{\left|\left[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t)\right]\right|}{\left|\mathbf{r}'^2(t)\right|} = 0$$

□

Definiţia 1.20. *Dreapta care trece prin punctul P şi este perpendiculară pe tangenta la curba plană γ în punctul P se numeşte normala la curba γ în punctul P.*

Definiţia 1.21. *Planul generat de normalele la curba spaţială γ în punctul P se numeşte planul normal la curba dată.*

3.1. Ecuațiile tangentei și normalei ale curbei plane γ

1. Fie curba γ este definită în mod explicit: $y = f(x)$, atunci ecuaţiile tangentei şi normalei vor fi, respectiv:

$$\boxed{y - y_0 = f^{'}(x_0)(x - x_0)},$$

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}.$$

2. Fie curba γ este definită în mod implicit: $F(x, y) = 0$, atunci ecuaţiile tangentei şi normalei vor fi, respectiv:

$$\boxed{F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0},$$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0)}}.$$

3. Fie curba γ este definită în mod parametric: $x = x(t)$, $y = y(t)$, atunci ecuaţiile tangentei şi normalei vor fi, respectiv:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)},}$$

$$\boxed{x^{'}(t_0)(x - x_0) + y^{'}(t_0)(y - y_0) = 0}.$$

3.2. Ecuațiile tangentei și planului normal ale curbei spațiale γ

1. Fie curba γ este definită în mod parametric: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, atunci ecuaţiile tangentei şi planului normal vor fi, respectiv:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)},}$$

$$\boxed{x^{'}(t_0)(x - x_0) + y^{'}(t_0)(y - y_0) + z^{'}(t_0)(z - z_0) = 0}.$$

2. Fie curba γ este definită prin ecuaţiile explicite: $y = y(x)$, $z = z(x)$, atunci ecuaţiile tangentei şi planului normal vor fi, respectiv:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{y'(x_0)} = \frac{z - z_0}{z'(x_0)},}$$

$$\boxed{(x - x_0) + y^{'}(x_0)(y - y_0) + z^{'}(x_0)(z - z_0) = 0}.$$

3. Fie curba γ este definită prin ecuaţiile implicite: $F(x, y, z) = 0,\ G(x, y, z) = 0$, atunci ecuaţiile tangentei şi planului normal vor fi, respectiv:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\Delta_1} = \frac{y - y_0}{\Delta_2} = \frac{z - z_0}{\Delta_3},}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ F_x(x_0, y_0, z_0) & F_y(x_0, y_0, z_0) & F_z(x_0, y_0, z_0) \\ G_x(x_0, y_0, z_0) & G_y(x_0, y_0, z_0) & G_z(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} = 0},$$

unde

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix},\ \Delta_2 = -\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix},\ \Delta_3 = -\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}.$$

Exerciţiul 1.1. *Determinaţi ecuaţiile tangentei şi normalei ale curbei γ:*

$$x = t^3 - 2t,\ y = t^2 + 1$$

în punctul $A(t = 1)$.

Exerciţiul 1.2. *Determinaţi ecuaţiile tangentei şi normalei ale curbei γ:*

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

în punctul $A(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2})$.

Exerciţiul 1.3. *Determinaţi tangenta la parabola $y = x^2$, paralelă la dreapta $y = 4x - 5$.*

Exerciţiul 1.4. *Determinaţi ecuaţia tangentei şi planului normal ale curbei*

$$x^2 + y^2 = 10,\ y^2 + z^2 = 25$$

în punctul $M(1, 3, 4)$.

4. Planul osculator al curbei

Fie γ o curbă, $P \in \gamma$, α - planul ce trece prin punctul P, $Q \notin \alpha$, $Q \in \gamma$.

Vom nota $h = \rho(Q, \alpha)$, $d = \rho(Q, P)$ (figura 1.9).

Definiţia 1.22. *Planul α se numeşte planul osculator al curbei γ în punctul P, dacă*

$$\lim_{Q \to P} \frac{h}{d^2} = 0.$$

Teorema 1.7. *Curba regulată γ (cel puţin de 2 ori continuu diferenţiabilă) în orice punct are planul osculator. Planul osculator este unic sau orice plan, ce conţine tangenta la curba γ, este osculator.*

Dacă

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

este ecuaţia curbei γ, atunci planul osculator în punctul, ce corespunde valorii parametrului t, este paralel vectorilor $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{r}''(t)$.

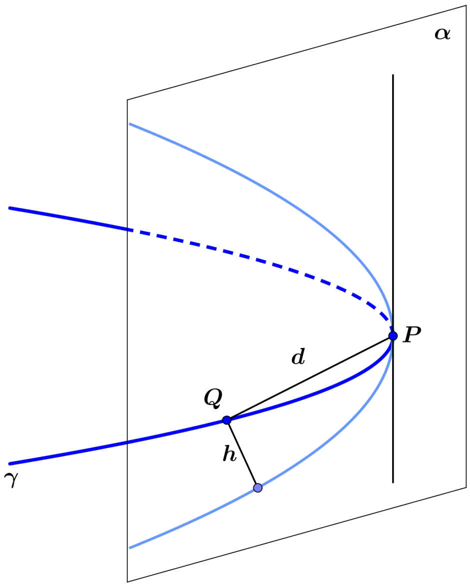


Figura 1.9: Planul osculator al curbei

Demonstraţie. Fie α - planul osculator al curbei γ în punctul P, ce corespunde valorii parametrului t. Vom nota prin $\vec{e}$ - vectorul unitar al normalei la planul α. Considerăm punctul Q, căruia îi corespunde valoarea $t+\Delta t$.

Calculăm:

$$d = |\Delta \mathbf{r}| = |\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)|\,,$$

$$h = \left|pr_{\vec{e}}\vec{PQ}\right| = \left|(\vec{e}, \vec{PQ})\right| = |(\vec{e}, \Delta\mathbf{r})| = |(\vec{e}, \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t))| =$$

$$= \left|(\vec{e}, \frac{\mathbf{r}^{'}(t)}{1!}\Delta t + \frac{\mathbf{r}^{''}(t)}{2!}\Delta t^2 + \vec{\varepsilon_1}\Delta t^2)\right| = \left|(\vec{e}, \mathbf{r}^{'}(t))\Delta t + \frac{1}{2}(\vec{e}, \mathbf{r}^{''}(t))\Delta t^2 + (\vec{e}, \vec{\varepsilon_1})\Delta t^2\right|.$$

Astfel

$$\frac{h}{d^2} = \frac{\left|(\vec{e}, \mathbf{r}^{'}(t))\Delta t + \frac{1}{2}(\vec{e}, \mathbf{r}^{''}(t))\Delta t^2 + (\vec{e}, \vec{\varepsilon_1})\Delta t^2\right|}{|\Delta\mathbf{r}|} = \frac{\left|\frac{(\vec{e}, \mathbf{r}^{'}(t))}{\Delta t} + \frac{(\vec{e}, \mathbf{r}^{''}(t))}{2} + \vec{\varepsilon_1}^{'}\right|}{\left|\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right|^2} =$$

$$= \frac{\left|\frac{(\vec{e}, \mathbf{r}^{'}(t))}{\Delta t} + \frac{(\vec{e}, \mathbf{r}^{''}(t))}{2} + \vec{\varepsilon_1}^{'}\right|}{\left|\mathbf{r}^{'2}(t) + \vec{\varepsilon_2}^{'}\right|}.$$

Deoarece $\frac{h}{d^2} \to 0$ pentru $\Delta t \to 0$, $\vec{\varepsilon_1}^{'}$, $\vec{\varepsilon_2}^{'} \to 0$, iar $\left|\mathbf{r}^{'}(t)\right| \neq 0$, atunci $(\vec{e}, \mathbf{r}^{'}(t)) = 0$ şi $(\vec{e}, \mathbf{r}^{''}(t)) = 0$. Deci, dacă planul osculator există, atunci planul osculator este paralel vectorilor $\mathbf{r}^{'}(t)$, $\mathbf{r}^{''}(t)$.

Existenţa planului osculator rezultă din

$$(\vec{e}, \mathbf{r}^{'}(t)) = (\vec{e}, \mathbf{r}^{''}(t)) = 0 \Rightarrow \frac{h}{d^2} = \frac{\left|\vec{\varepsilon_1}^{'}\right|}{\left|\mathbf{r}^{'2}(t) + \vec{\varepsilon_2}^{'}\right|} \to 0,\ \Delta t \to 0.$$

Este evident, că planul osculator fiind paralel vectorilor $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{r}''(t)$ va fi unic, dacă $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{r}''(t)$ sunt neparaleli.

$\square$

Pentru cazul definirii parametrice a curbei γ:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

avem următoarea ecuaţie a planului osculator în punctul P cu valoarea parametrului $t = t_0$:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0},$$

unde $x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0),\ z_0 = z(t_0)$;

sau ecuaţia planului osculator va fi:

$$\boxed{A[x - x(t_0)] + B[y - y(t_0)] + C[z - z(t_0)] = 0},$$

unde

$$A = \begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix},\quad B = -\begin{vmatrix} x'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix},\quad C = \begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix}$$

şi $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ - vectorul normal al planului osculator.

Teorema 1.8. *O curbă în spaţiu este plană dacă şi numai dacă, în orice punct al ei, planul osculator este acelaşi (are direcţia normalei fixă).*

În cazul cînd planul osculator este unic, vom evidenţia 2 drepte remarcabile: *normala principală* - normala situată în planul osculator, şi *binormala* - normala perpendiculară planului osculator.

Exerciţiul 1.5. *Determinaţi ecuaţia planului osculator în punctul $M(1,1,1)$ la curba γ: $y^2 = x,\ x^2 = z$.*

Exerciţiul 1.6. *Să se arate că următoarea curbă este curbă plană şi să se determine planul osculator (care o conţine):*

$$\mathbf{r}(t) = \{\sin t,\ 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right),\ 1 + \cos t\}.$$

5. Tangenţa de ordinul n a curbelor

Fie γ, γ' - curbe elementare, ce au un punct comun O şi $P \in \gamma'$.

Notăm:

$$h = \rho(P, \gamma),\ d = \rho(P, O).$$

Definiţia 1.23. *Vom spune, că curba γ' are cu curba γ tangenţă de ordinul n în punctul O (figura 1.10), dacă*

$$\frac{h}{d^n} \to 0,\ P \to O.$$

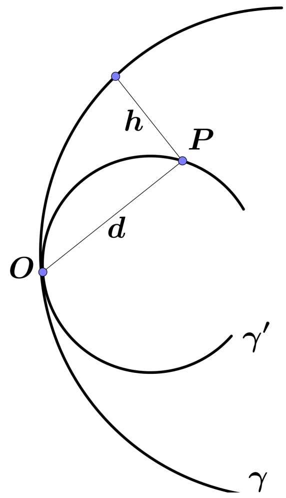


Figura 1.10: Tangenţa curbelor

Fie γ, $\gamma^{'}$ - curbe generale, ce au un punct comun O. Vom spune, că curba $\gamma^{'}$ are cu curba γ tangenţă de ordinul n în punctul O, dacă vecinătatea elementară a punctului $O \in \gamma'$ are tangenţă de ordinul n cu vecinătatea elementară a punctului $O \in \gamma$.

Teorema 1.9. *Fie γ, $\gamma^{'}$ - curbe regulate plane; curba γ este definită în mod implicit:*

$$\varphi(x,y) = 0,$$

iar curba $\gamma^{'}$ este definită în mod parametric:

$$x = x(t),\ y = y(t).$$

Fie în punctul $O(x_0, y_0)$ avem:

$$\varphi_x{}^2 + \varphi_y{}^2 \neq 0.$$

Atunci pentru ca curba $\gamma^{'}$ cu curba γ să aibă tangenţă de ordinul n în punctul O este necesar şi suficient ca pentru valoarea parametrului t, ce corespunde punctului O, să fie satisfăcute condiţiile:

$$\begin{cases} \varphi(x(t),\ y(t)) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\varphi(x(t),\ y(t)) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^n}{dt^n}\varphi(x(t),\ y(t)) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Exerciţiul 1.7. *Determinaţi ordinul de tangenţă în originea de coordonate a curbelor $y = sinx$, $y = tgx$.*

6. Înfăşurătoarea unei familii de curbe, ce depind de parametru

Fie $S\{\gamma_\alpha\}$ - o familie de curbe netede plane, ce depind de parametrul α (figura 1.11).

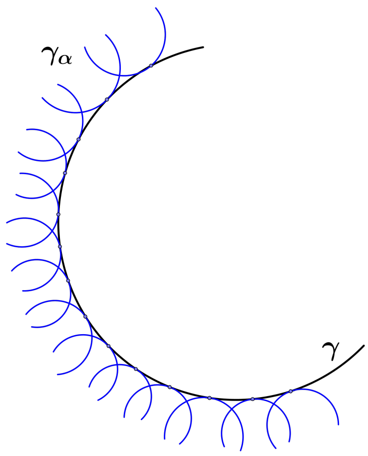


Figura 1.11: Înfăşurătoarea unei familii de curbe

Definiţia 1.24. *Curba netedă γ se numeşte înfăşurătoarea familiei S, dacă curba în orice punct al său este tangentă cel puţin cu o curbă a familiei şi fiecare segment al ei este tangent cu un număr infinit de curbe a familiei.*

De exemplu, curba netedă, ce nu are secţiuni rectilinii, este înfăşurătoarea tangentelor sale.

Următoarea teoremă, într-o măsură oarecare, rezolvă problema determinării înfăşurătoarei.

Teorema 1.10. *Fie curbele γ_α ai familiei S în domeniul G sunt definite de ecuaţiile*

$$\varphi(x, y, \alpha) = 0, \ a \leq \alpha \leq b,$$

unde φ - o funcţie continuu diferenţiabilă în raport cu fiecare argument al său ce satisface condiţia

$$\varphi_x{}^2 + \varphi_y{}^2 \neq 0.$$

Atunci înfăşurătoarea γ a familiei S (dacă există) se defineşte de ecuaţiile:

$$\varphi(x, y, \alpha) = 0, \ \varphi_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \tag{1.5}$$

în sensul, că pentru fiecare punct (x, y) al înfăşurătoarei putem indica acel α a.î. sistemul de valori x, y, α va satisface ambele ecuaţii $\varphi = 0$, $\varphi_\alpha = 0$.

Exerciţiul 1.8. *Determinaţi înfăşurătoarea familiei de curbe:*

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = a^2.$$

Remarca 1.3. *Sistemul de ecuaţii (1.12) poate fi satisfăcut de curbe, ce nu sunt înfăşurătoare. De exemplu, pentru familia de curbe*

$$(x - \alpha)^3 + (y - \alpha)^3 - 3(x - \alpha)(y - \alpha) = 0$$

sistemul (1.12) este satisfăcut de dreapta $y = x$, care nu este însă înfăşurătoare. Această dreaptă este alcătuitădin punctele nodale ale curbelor familiei date (figura 1.12).

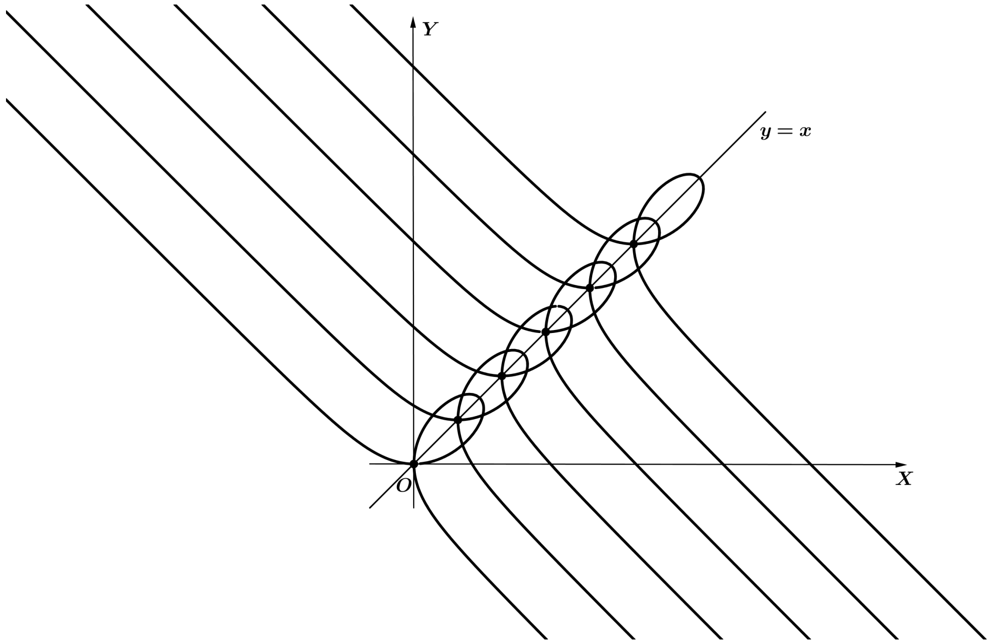


Figura 1.12: Dreapta $y = x$ nu este înfăşurătoare

7. Lungimea arcului de curbă. Parametrizare naturală

Fie γ - curba elementară, care este imaginea unui segment deschis g la aplicaţia topologică f.

Definiţia 1.25. *Vom spune, că linia frîntă* Γ *este regulat înscrisă în curba* γ*, dacă proimaginile vîrfurilor sale pe* g *urmează în aceeaşi ordine ca şi pe linia frîntă* Γ *(figura 1.13).*

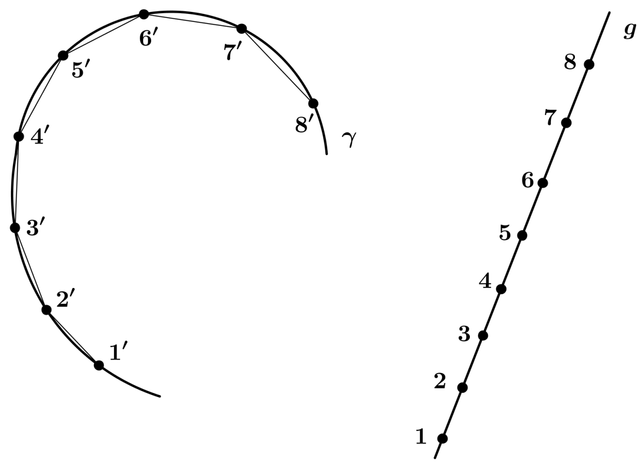


Figura 1.13: Linie frîntă regulat înscrisă în curbă

Proprietatea liniei frînte de a fi regulat înscrisă în curbă nu depinde de omomorfismul f.

Definiţia 1.26. *Curba* γ *se numeşte rectificabilă în vecinătatea punctului* P*, dacă punctul* P *posedă vecinătate elementară, în care toate liniile frînte regulat înscrise în ea sunt mărginite omogen după lungime.*

Curba, rectificabilă în vecinătatea fiecărui punct al său, se numeşte *rectificabilă*.

Definiţia 1.27. *Vom numi segment de curbă, acea parte a ei omeomorfă segmentului închis de linie dreaptă.*

Definiţia 1.28. *Vom numi lungimea arcului (sau arc) supremumul lungimilor liniilor frînte regulat înscrise în acest segment.*

Teorema 1.11. *Curba netedă γ este rectificabilă.*

Dacă

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

este parametrizarea netedă a ei şi $\tilde{\gamma}$ $(a \leq t \leq b)$ - segmentul curbei γ, atunci lungimea acestui segment este

$$s(\tilde{\gamma}) = \int_b^a \left|\mathbf{r}^{'}(t)\right| dt.$$

Fie γ o curbă rectificabilă, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ - o parametrizare arbitrară a ei. Fie $s = s(t)$ - lungimea arcului segmentului $(t_0 t) \in \gamma$. Vom defini funcţia $\sigma(t)$ prin condiţiile:

$$\sigma(t) = \begin{cases} s(t),\, t_0 < t \\ -s(t),\, t_0 > t \\ 0,\, t_0 = t \end{cases}$$

Funcţia $\sigma(t)$ este strict monotonă, prin urmare σ poate fi luată drept parametru pe curbă. Astfel de parametrizare se numeşte *parametrizare naturală*.

Teorema 1.12. *Parametrizarea naturală a curbei γ regulate (de k ori diferenţiabile, analitice) fără puncte singulare este regulată (de k ori deferenţiabilă, respectiv analitică). Dacă $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\sigma)$ - parametrizarea naturală a curbei, atunci*

$$\left|\mathbf{r}^{'}(\sigma)\right| = 1.$$

Demonstraţie.

Fie $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}(t)$ o parametrizare regulată a curbei γ în vecinătatea unui punct arbitrar, ce corespunde valorii parametrului σ_1. Pentru fiecare segment din această vecinătate avem

$$\sigma - \sigma_1 = \int_{t_1}^{t} \sqrt{\mathbf{r}'^2(t)}dt.$$

Deoarece

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{[\tilde{\mathbf{r}}'(t)]^2} > 0,$$

iar $\tilde{\mathbf{r}}(t)$ - funcţie de k ori diferenţiabilă în raport cu variabila t, atunci t este funcţie de k ori diferenţiabilă în raport cu variabila σ. Dar pentru σ, apropiat de σ_1,

$$\mathbf{r}(\sigma) = \tilde{\mathbf{r}}(t(\sigma)).$$

Rezultă, că $\mathbf{r}(\sigma)$ - funcţie regulată (de k ori diferenţiabilă). Avem:

$$\frac{d\mathbf{r}(\sigma)}{d\sigma} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\sigma} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{d\sigma}{dt}} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} \cdot \frac{1}{|\tilde{\mathbf{r}}'(t)|}.$$

Deci,

$$\left|\mathbf{r}^{'}(\sigma)\right| = 1.$$

□

În continuare vom da formulele pentru lungimea arcului curbei regulate în diferite cazuri de definire analitică a curbei.

1. $\gamma : x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$

$$\boxed{s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left|\mathbf{r}^{'}(t)\right| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x^{'2} + y^{'2} + z^{'2}} dt}.$$

2. $\gamma : y = y(x),\ z = z(x)$

$$\boxed{s(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y^{'2} + z^{'2}} dx}.$$

Pentru curbele plane, situate în planul Oxy, în aceste formule vom pune $z^{'} = 0$.

Exerciţiul 1.9. *Determinaţi lungimea arcului curbei*

$$x = acht,\ y = asht,\ z = at$$

între punctele 0 *şi* t.

Exerciţiul 1.10. *Determinaţi lungimea arcului curbei*

$$x^3 = 3a^2 y,\ 2xz = a^2$$

între planele $y = a/3$ *şi* $y = 9a$.

8. Curbura curbei. Formule de calcul

Fie P - un punct arbitrar al curbei regulate γ şi Q - punctul curbei, situat aproape de P. Vom nota prin $\Delta\varphi$ - unghiul între tangentele curbei γ în punctele P şi Q, iar prin $|\Delta s|$ - lungimea arcului $PQ \in \gamma$ (figura 1.14).

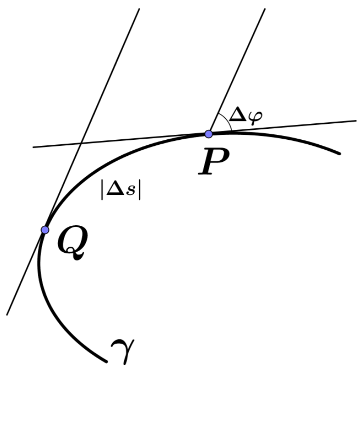


Figura 1.14: Curbura curbei

Definiţia 1.29. *Vom numi curbura curbei γ în punctul P*

$$\lim_{Q \to P} \frac{\Delta\varphi}{|\Delta s|} = k.$$

Definiţia 1.30. *Raportul*

$$R_P = \frac{1}{k(P)}$$

se numeşte raza de curbură a curbei γ în punctul P.

Teorema 1.13. *Curba regulată (de 2 ori continuu diferenţiabilă) are în orice punct curbura k.*

Dacă $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ - parametrizarea naturală a curbei γ, atunci

$$k = \left|\mathbf{r}^{''}(s)\right|.$$

Demonstraţie.

Fie punctelor P şi Q le corespund valorile s şi $s + \Delta s$ ale parametrului, respectiv. Unghiul $\Delta\varphi$ este egal cu unghiul dintre vectorii unitari ale tangentelor $\vec{\tau}(s) = \mathbf{r}^{'}(s)$, $\vec{\tau}(s + \Delta s) = \mathbf{r}^{'}(s + \Delta s)$ (figura 1.15).

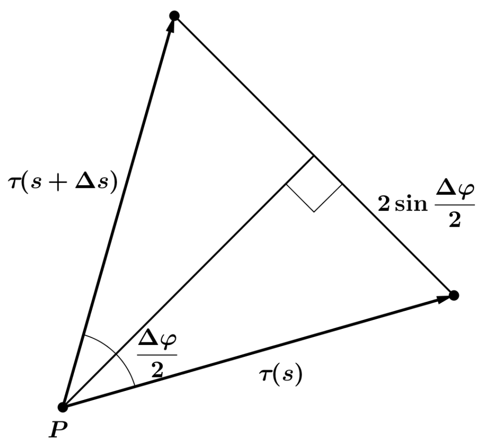


Figura 1.15: Vectori unitari ale tangentelor

Deoarece vectorii $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\tau}(s + \Delta s)$ sunt unitari şi alcătuiesc unghiul $\Delta\varphi$, avem

$$|\vec{\tau}(s + \Delta s) - \vec{\tau}(s)| = 2sin\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Prin urmare

$$\frac{|\vec{\tau}(s + \Delta s) - \vec{\tau}(s)|}{|\Delta s|} = \frac{2sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{|\Delta s|} = \frac{sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \frac{\Delta\varphi}{|\Delta s|}.$$

Trecînd la limită pentru $\Delta\varphi \to 0$ ($|\Delta s| \to 0$), obţinem

$$\left|\mathbf{r}^{''}(s)\right| = k.$$

$\square$

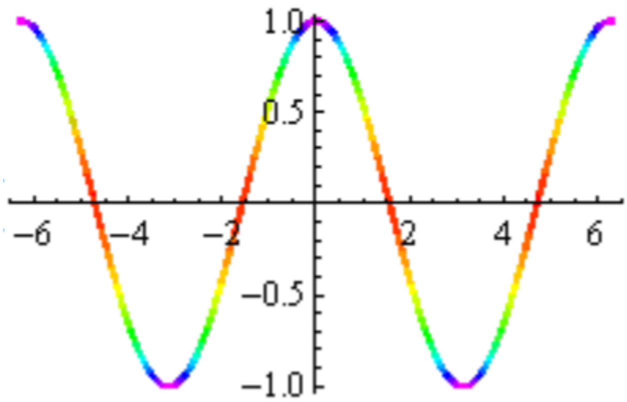


Figura 1.16: Diferite culori ale curbei în dependenţă de valorile curburii

În figura 1.16 este arătată curbura curbei plane $y = \cos x$ în fiecare punct al ei, alternînd culorile:

În continuare vom determina expresia pentru curbura curbei în cazul definirii parametrice arbitrare. Fie curba este definită de ecuaţia vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Să exprimăm derivata a doua a vector-funcţiei $\mathbf{r}$ după arcul s prin derivatele în raport cu t. Avem

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_s^{'} \cdot s^{'}.$$

De aici

$$\mathbf{r}^{'2} = s^{'2} \qquad \left(\left|\mathbf{r}^{'}(s)\right| = 1\right).$$

Deci

$$\mathbf{r}_s^{'} = \frac{\mathbf{r}^{'}}{s^{'}} = \frac{\mathbf{r}^{'}}{\sqrt{s^{'2}}} = \frac{\mathbf{r}^{'}}{\sqrt{\mathbf{r}^{'2}}}.$$

Diferenţiind această egalitate încă odată în raport cu t, vom obţine

$$\mathbf{r}_{ss}^{''} \cdot s^{'} = \frac{\mathbf{r}^{''} \cdot \sqrt{\mathbf{r}^{'2}} - \mathbf{r}^{'} \cdot \frac{2\left(\mathbf{r}^{'}, \mathbf{r}^{''}\right)}{2\sqrt{\mathbf{r}^{'2}}}}{\sqrt{\mathbf{r}^{'2}}} = \frac{\mathbf{r}^{''}\mathbf{r}^{'2} - \mathbf{r}^{'}\left(\mathbf{r}^{'},\, \mathbf{r}^{''}\right)}{\left(\sqrt{\mathbf{r}^{'2}}\right)^3}.$$

Ridicînd la puterea a doua şi ţinînd cont, că $\mathbf{r}^{'2} = s^{'2}$, vom primi

$$\mathbf{r}_{ss}^{''\,2} \cdot s^{'2} = \frac{\mathbf{r}^{''2} \cdot \mathbf{r}^{'4} - 2\mathbf{r}^{''}\mathbf{r}^{'3}\left(\mathbf{r}^{'},\, \mathbf{r}^{''}\right) + \mathbf{r}^{'2}\left(\mathbf{r}^{'},\, \mathbf{r}^{''}\right)^2}{\left(\mathbf{r}^{'2}\right)^3} = \frac{\mathbf{r}^{''2} \cdot \mathbf{r}^{'4} - \mathbf{r}^{'2}\left(\mathbf{r}^{'},\, \mathbf{r}^{''}\right)^2}{\left(\mathbf{r}^{'2}\right)^3} =$$

$$= \frac{\mathbf{r}^{'2}\left(\mathbf{r}^{''2} \cdot \mathbf{r}^{'2} - \left(\mathbf{r}^{'},\, \mathbf{r}^{''}\right)^2\right)}{\left(\mathbf{r}^{'2}\right)^3} = \frac{\mathbf{r}^{'2}\left(\left|\mathbf{r}^{''}\right|^2 \cdot \left|\mathbf{r}^{'}\right|^2 - \left|\mathbf{r}^{''}\right|^2 \cdot \left|\mathbf{r}^{'}\right|^2 \cdot cos^2\varphi\right)}{\left(\mathbf{r}^{'2}\right)^3} =$$

$$= \frac{\mathbf{r}^{'2} \cdot \left|\mathbf{r}^{''}\right|^2 \cdot \left|\mathbf{r}^{'}\right|^2 \cdot (1 - cos^2\varphi)}{\left(\mathbf{r}^{'2}\right)^3} = \frac{\mathbf{r}^{'2} \cdot \left|\mathbf{r}^{''}\right|^2 \cdot \left|\mathbf{r}^{'}\right|^2 \cdot sin^2\varphi}{\left(\mathbf{r}^{'2}\right)^3} = \frac{\mathbf{r}^{'2} \cdot \left|\left[\mathbf{r}^{'},\, \mathbf{r}^{''}\right]\right|^2}{\left(\mathbf{r}^{'2}\right)^3}.$$

Deci

$$\mathbf{r}_{ss}^{''\,2} \cdot s^{'2} = \frac{\mathbf{r}^{'2} \cdot \left|\left[\mathbf{r}^{'},\ \mathbf{r}^{''}\right]\right|^2}{\left(\mathbf{r}^{'2}\right)^3}.$$

Rezultă

$$\mathbf{r}_{ss}^{''\,2} = \frac{\left|\left[\mathbf{r}^{'},\ \mathbf{r}^{''}\right]\right|^2}{\left(\mathbf{r}^{'2}\right)^3} = k^2$$

sau

$$k = \frac{\left|\left[\mathbf{r}^{'},\ \mathbf{r}^{''}\right]\right|}{\left(\sqrt{\mathbf{r}^{'2}}\right)^3} = \frac{\left|\left[\mathbf{r}^{'},\ \mathbf{r}^{''}\right]\right|}{|\mathbf{r}^{'}|^3}.$$

Astfel, am obţinut

$$\boxed{k = \frac{\left|\left[\mathbf{r}^{'},\ \mathbf{r}^{''}\right]\right|}{|\mathbf{r}^{'}|^3}}.$$

Exemplul 1.4. *Curbura dreptei, definită prin ecuaţiile parametrice:*

$$x = x_0 + at,\ \ y = y_0 + bt,$$

unde (x_0, y_0) *- un punct al dreptei, iar* $\{a, b\}$ *- coordonatele vectorului director. Astfel*

$$\mathbf{r} = \{x_0 + at,\ \ y_0 + bt\}$$

$$\mathbf{r}^{'} = \{a, b\},$$

$$\mathbf{r}^{''} = \{0, 0\}.$$

$$\left[\mathbf{r}^{'}, \mathbf{r}^{''}\right] = \{0, 0, 0\} = \vec{0},$$

$$\left|\left[\mathbf{r}^{'}, \mathbf{r}^{''}\right]\right| = 0.$$

Înlocuind, avem

$$k = 0.$$

Exemplul 1.5. *Curbura cercului, definit prin ecuaţiile parametrice:*

$$x = Rcost,\ \ y = Rsint.$$

Astfel

$$\mathbf{r} = \{Rcost,\ \ Rsint\}$$

$$\mathbf{r}^{'} = \{-Rsint,\ \ Rcost\},$$

$$\mathbf{r}^{''} = \{-Rcost,\ \ -Rsint\}.$$

$$\left[\mathbf{r}^{'}, \mathbf{r}^{''}\right] = \{0, 0, R^2\},$$

$$\left|\left[\mathbf{r}^{'}, \mathbf{r}^{''}\right]\right| = R^2,$$

$$\left|\mathbf{r}^{'}\right| = R$$

Înlocuind, avem

$$k = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}.$$

Deci

$$k = \frac{1}{R}.$$

În continuare vom deduce formulele pentru curbura curbei în diferite cazuri de definire analitică a curbei.

1. γ: $x = x(t),\ y = y(t)$

   Astfel

$$\mathbf{r} = \{x(t),\ y(t)\}$$

$$\mathbf{r}^{'} = \{x^{'}, y^{'}\},$$

$$\mathbf{r}^{''} = \{x^{''}, y^{''}\}.$$

$$\left[\mathbf{r}^{'}, \mathbf{r}^{''}\right] = \{0, 0, \begin{vmatrix} x^{'} & y^{'} \\ x^{''} & y^{''} \end{vmatrix}\},$$

$$\left|\left[\mathbf{r}^{'}, \mathbf{r}^{''}\right]\right| = \left|x^{'}y^{''} - x^{''}y^{'}\right|,$$

$$\left|\mathbf{r}^{'}\right| = \sqrt{x^{'2} + y^{'2}}$$

   Înlocuind, avem

$$\boxed{k = \frac{\left|x^{'}y^{''} - x^{''}y^{'}\right|}{\left(x^{'2} + y^{'2}\right)^{\frac{3}{2}}}}.$$

2. γ: $y = f(x)$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = x,\ y = f(x)$$

   Aplicăm formula din cazul precedent:

$$x^{'} = 1,\ x^{''} = 0,\ y^{'} = f^{'}(x),\ y'' = f^{''}(x).$$

   Înlocuind, obţinem

$$\boxed{k = \frac{\left|f^{''}(x)\right|}{\left(1 + f^{'2}(x)\right)^{\frac{3}{2}}}}.$$

3. γ: $F(x, y) = 0$

   Calculam derivata în raport cu variabila x:

$$F^{'}_x \cdot x^{'} + F^{'}_y \cdot y^{'} = 0$$

   sau

$$F^{'}_x + F^{'}_y \cdot y^{'} = 0.$$

Rezultă

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Calculăm derivata a doua:

$$y'' = -\frac{\left(F'_y\right)^2 \cdot F''_{xx} - 2F'_x \cdot F'_y \cdot F''_{xy} + F''_{yy} \cdot \left(F'_x\right)^2}{\left(F'_y\right)^3}.$$

Înlocuim în formula pentru curbură din cazul precedent:

$$k = \frac{\left|f''(x)\right|}{\left(1 + f'^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}},$$

obţinem

$$\boxed{k = \frac{\left|\left(F'_y\right)^2 \cdot F''_{xx} - 2F'_x \cdot F'_y \cdot F''_{xy} + F''_{yy} \cdot \left(F'_x\right)^2\right|}{\left[\left(F'_x\right)^2 + \left(F'_y\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}}.$$

Exerciţiul 1.11. *Calculaţi curbura curbei:*

$$x = acht,\ y = asht,\ z = at.$$

Exerciţiul 1.12. *Calculaţi curbura curbei:*

$$y = sinx.$$

Exerciţiul 1.13. *Calculaţi curbura curbei:*

$$y^2 = 2px.$$

9. Torsiunea curbei. Formule de calcul

Fie P - un punct arbitrar al curbei γ şi Q - punctul curbei, situat aproape de P. Vom nota prin $\Delta\theta$ - unghiul între planele osculatoare ale curbei γ în punctele P şi Q, iar prin $|\Delta s|$ - lungimea arcului $PQ \in \gamma$ (figura 1.17).

Definiţia 1.31. *Vom numi torsiunea absolută a curbei γ în punctul P*

$$\lim_{Q \to P} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|} = |\varkappa|.$$

Teorema 1.14. *Curba regulată γ (de 3 ori continuu diferenţiabilă) în fiecare punct al său, în care curbura $k \neq 0$, are torsiunea absolută $|\varkappa|$.*

Dacă $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ - parametrizarea naturală a curbei γ, atunci

$$|\varkappa| = \frac{\left|\left(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}'''\right)\right|}{k^2}.$$

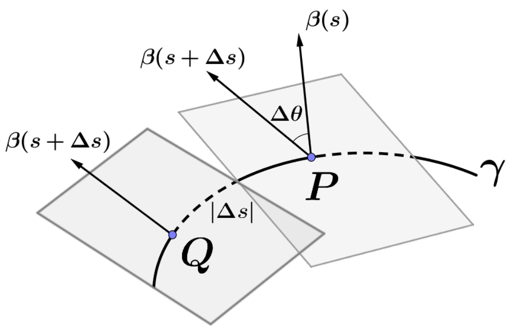


Figura 1.17: Torsiunea curbei

Demonstraţie. Dacă curbura curbei γ în punctul P este nenulă, atunci, folosind continuitatea, $k \neq 0$ şi în punctele apropiate de P. În orice punct, unde $k \neq 0$, vectorii $\mathbf{r}'(s)$, $\mathbf{r}''(s)$ sunt nenuli şi neparaleli. De aceea, în fiecare punct Q, apropiat de P, există un plan osculator determinat.

Fie $\vec{\beta}(s)$ şi $\vec{\beta}(s+\Delta s)$ - vectori unitari ale binormalei în punctele P şi Q ale curbei γ. Unghiul $\Delta\theta$ este egal cu unghiul dintre vectorii $\vec{\beta}(s)$ şi $\vec{\beta}(s+\Delta s)$.

Deoarece vectorii $\vec{\beta}(s)$ şi $\vec{\beta}(s+\Delta s)$ sunt unitari şi alcătuiesc unghiul $\Delta\theta$, avem

$$\left|\vec{\beta}(s+\Delta s)-\vec{\beta}(s)\right| = 2sin\frac{\Delta\theta}{2}.$$

De aceea

$$\frac{\left|\vec{\beta}(s+\Delta s)-\vec{\beta}(s)\right|}{|\Delta s|} = \frac{2sin\frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|} = \frac{sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}.$$

De aici, trecînd la limită pentru $|\Delta s| \to 0$, primim

$$\left|\vec{\beta}'(s)\right| = |\varkappa|.$$

$\vec{\beta}' \perp \vec{\beta}$, deoarece $\vec{\beta}'\vec{\beta} = \left(\frac{1}{2}\vec{\beta}^2\right)' = 0$. Este evident, că $\vec{\beta}' \perp \vec{t}$.

Într-adevăr,

$$\vec{\beta}' = \left(\vec{t}\times\vec{n}\right)' = \vec{t}'\times\vec{n}+\vec{t}\times\vec{n}'.$$

Dar $\vec{t}' \parallel \vec{n}$, de aceea $\vec{\beta}' = \vec{t}\times\vec{n}'$. Rezultă $\vec{\beta}' \perp \vec{t}$. Deci, $\vec{\beta}' \parallel \vec{n}$ şi

$$|\varkappa| = \left|\left(\vec{\beta}',\ \vec{n}\right)\right|.$$

Înlocuind $\vec{n} = \frac{1}{k}\mathbf{r}''$ şi $\vec{\beta} = \frac{\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''}{k}$, primim:

$$|\varkappa| = \frac{\left|\left(\mathbf{r}',\ \mathbf{r}'',\ \mathbf{r}'''\right)\right|}{k^2}.$$

□

Semnul torsiunii depinde de direcţia rotaţiei: în cazul, cînd rotaţia se efectuează împotriva mişcării acelor de ceasornic, dacă privim din vîrful vectorului tangent, atunci avem semnul

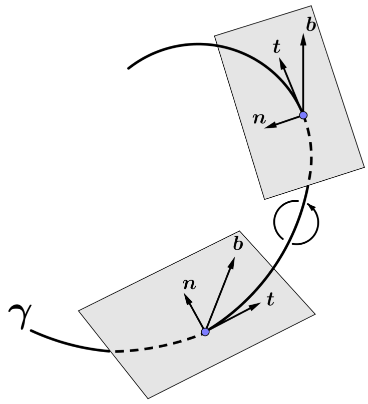


Figura 1.18: Semnul torsiunii

plus; în cazul, cînd rotaţia se efectuează după mişcarea acelor de ceasornic, atunci - minus (figura 1.18).

În cazul parametrizării arbitrare $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ale curbei γ, torsiunea se va calcula după formula:

$$\boxed{|\varkappa| = \frac{\left|\left(\mathbf{r}', \ \mathbf{r}'', \ \mathbf{r}'''\right)\right|}{\left([\mathbf{r}', \ \mathbf{r}'']\right)^2}}.$$

Exerciţiul 1.14. *Calculaţi torsiunea curbei:*

$$x = acht, \ y = asht, \ z = at.$$

Exerciţiul 1.15. *Calculaţi torsiunea curbei:*

$$y = sinx.$$

Remarca 1.4. *Curba, pentru care torsiunea în fiecare punct este nulă, este o curbă plană.*

10. Formulele Serret-Frenet. Ecuaţiile naturale ale curbei

Definiţia 1.32. *Trei semidrepte, ce iesă dintr-un punct al curbei şi au direcţiile vectorilor $\vec{t}$, $\vec{n}$ şi $\vec{b}$, sunt muchiile unghiului triedru. Acest unghi triedru se numeşte triedru natural (figura 1.19).*

La cercetarea proprietăţilor curbei în vecinătatea punctului P în mai multe cazuri este mai convenabil de ales sistemul cartesian de coordonate în următorul mod: P - originea de coordonate; axele triedrului natural - axele de coordonate. În continuare vom primi ecuaţia curbei la alegerea dată a sistemului de coordonate.

Vom exprima derivatele vectorilor $\vec{t}$, $\vec{n}$ şi $\vec{b}$ pe arcul curbei prin însăşi vectorii $\vec{t}$, $\vec{n}$ şi $\vec{b}$.

Observăm, că

$$\vec{t}' = \mathbf{r}'' = k\vec{n}.$$

Astfel

$$\boxed{\vec{t}' = k\vec{n}}.$$

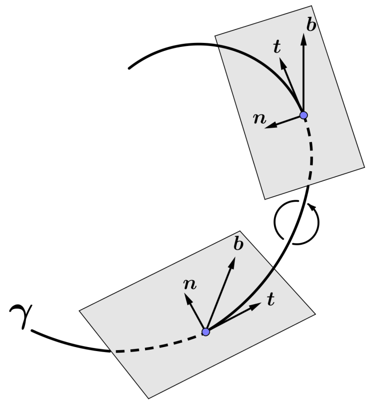


Figura 1.19: Triedrul natural

Următorul vector $\vec{b}' \parallel \vec{n}$ şi $\vec{b}'\vec{n} = -\varkappa$, deci

$$\boxed{\vec{b}' = -\varkappa\vec{n}}.$$

Şi $\vec{n}' = \left(\vec{b} \times \vec{t}\right)' = \vec{b}' \times \vec{t} + \vec{b} \times \vec{t}' = -\varkappa\vec{n} \times \vec{t} + \vec{b} \times k\vec{n} = \varkappa\vec{b} - k\vec{t}$. Astfel

$$\boxed{\vec{n}' = -k\vec{t} + \varkappa\vec{b}}.$$

Am obţinut

$$\begin{cases} \vec{t}' = & & k\vec{n} & \\ \vec{n}' = & -k\vec{t} & & +\varkappa\vec{b} \\ \vec{b}' = & & -\varkappa\vec{n} & \end{cases} \tag{1.6}$$

Formulele (1.6) se numesc *formulele Serret-Frenet*.

Pentru a memoriza mai uşor formulele (1.6), vom folosi următorul tabel:

	$\vec{t}$	$\vec{n}$	$\vec{b}$
$\vec{t}'$		k	
$\vec{n}'$	$-k$		$\varkappa$
$\vec{b}'$		$-\varkappa$	

Exerciţiul 1.16. *Demonstraţi, că*

$$\left(\vec{b}',\ \vec{b}'',\ \vec{b}'''\right) = \varkappa^5 \left(\frac{k}{\varkappa}\right)'.$$

Vom găsi descompunerea funcţiei vectoriale $\mathbf{r}(s + \Delta s)$ în vecinătatea punctului arbitrar P, ce corespunde arcului s, după axele triedrului natural în punctul dat. Avem:

$$\mathbf{r}(s + \Delta s) = \mathbf{r}(s) + \Delta s \cdot \mathbf{r}'(s) + \frac{\Delta s^2}{2} \cdot \mathbf{r}''(s) + \frac{\Delta s^3}{6} \cdot \mathbf{r}'''(s) + ...$$

Însă, în punctul

P: $\mathbf{r} = \vec{0}$, $\mathbf{r}' = \vec{t}$, $\mathbf{r}'' = k\vec{n}$,

$\mathbf{r}''' = (k\vec{n})' = k'\vec{n} + k\vec{n}' = k'\vec{n} + (-k\vec{t} + \varkappa\vec{b})k = k'\vec{n} - k^2\vec{t} + k\varkappa\vec{b}$ ş.a.m.d.

Prin urmare,

$$\mathbf{r}(s+\Delta s) = \Delta s \cdot \vec{t} + \frac{\Delta s^2}{2} \cdot k\vec{n} + \frac{\Delta s^3}{6} \cdot (k'\vec{n} - k^2\vec{t} + k\varkappa\vec{b}) + ...$$

sau

$$\mathbf{r}(s+\Delta s) = \vec{t}\left(\Delta s - \frac{\Delta s^3}{6}k^2 + ...\right) + \vec{n}\left(\frac{\Delta s^2}{2} + \frac{\Delta s^3}{6}k' + ...\right) + \vec{b}\left(\frac{\Delta s^3}{6}k\varkappa + ...\right).$$

Observăm, că coordonatele x, y, z sunt funcţii de k şi $\varkappa$. Aceasta ne dă posibilitatea să afirmăm că curbura şi torsiunea într-o măsură oarecare determină curba.

Teorema 1.15. *Fie $k(s)$ şi $\varkappa(s)$ - funcţii arbitrare regulate şi $k(s) > 0$. Atunci există şi numai una singură, cu exactitatea pînă la poziţia ei în spaţiu, curba γ, pentru care $k(s)$ - curbura, $\varkappa(s)$ - torsiunea, în punctul ce corespunde arcului s.*

Teorema 1.16. *Fie γ_1, γ_2 - două curbe netede cu aceeaşi lungime şi $\mathbf{r}_1(s)$, $\mathbf{r}_2(s)$ - parametrizările lor naturale. Dacă în punctele corespunzătoare aceste curbe au curburile şi torsiunile identice:*

$$k_1(s) = k_2(s), \ \varkappa_1(s) = \varkappa_2(s),$$

atunci există o aplicaţie ce transformă curba γ_1 în curba γ_2. Altfel, curbura şi torsiunea determină curba cu exactitatea pînă la poziţia ei în spaţiu (figura 1.20).

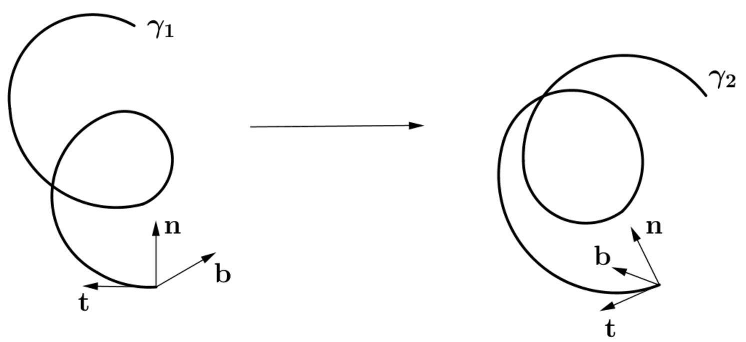


Figura 1.20: Curbe netede cu aceeaşi lungime

Definiţia 1.33. *Sistemul de egalităţi*

$$k = k(s), \ \varkappa = \varkappa(s) \tag{1.7}$$

se numeşte ecuaţiile naturale ale curbei.

Exerciţiul 1.17. *Determinaţi ecuaţiile naturale ale curbei, definită de parametrizarea*

$$x = at, \ y = a\sqrt{2}lnt, \ z = \frac{a}{t} \ \ (a > 0).$$

Unitatea de conținut II.
TEORIA SUPRAFEȚELOR

1. Suprafață elementară. Suprafață simplă. Suprafață generală

1.1. Suprafață elementară

Definiţia 2.1. *Domeniul plan se numeşte domeniul elementar, dacă acesta reprezintă imaginea discului deschis la alicaţia topologică.*

Astfel, domeniul elementar - este domeniul omeomorf discului.

Exemplul 2.1. *Domeniu elementar: interiorul pătratului, dreptunghiului, triunghiului, elipsei etc.*

Definiţia 2.2. *Mulţimea Φ de puncte din spaţiu se numeşte suprafaţă elementară, dacă această mulţime este imaginea domeniului elementar plan la aplicaţia topologică a acesteia în spaţiu (figura 2.1).*

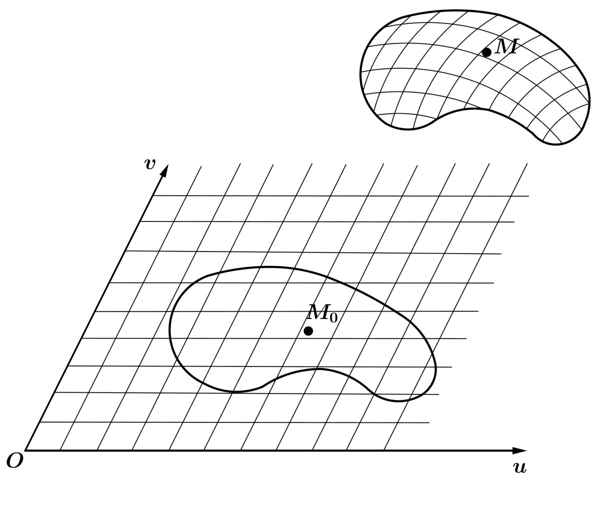


Figura 2.1: Suprafaţă elementară

Fie Φ - o suprafaţă elementară şi G - domeniul elementar plan, imaginea căruia la aplicaţia topologică f este suprafaţa Φ. Fie u şi v - coordonatele cartesiene ale punctului arbitrar din domeniul G, iar x, y, z - coordonatele punctului respectiv de pe suprafaţă a.î.

$$x = f_1(u, v),\ y = f_2(u, v),\ z = f_3(u, v). \tag{2.1}$$

Acest sistem de egalităţi, ce defineşte aplicaţia f a domeniului G în spaţiu, se numeşte *ecuaţiile suprafeţei* Φ *în formă parametrică*; u şi v se numesc *coordonatele curbilinii pe suprafaţă.*

Ecuaţiile (2.1) pentru u sau v fixat definesc o curbă situată pe suprafaţa Φ. Aceste curbe se numesc *liniile de coordonate.*

Definirea coordonatelor curbilinii u, v ale punctului M de pe suprafaţa parametrizată Φ determină poziţia acestui punct, deci, şi valoarea razei ei vectoare $\mathbf{r} = OM$. Astfel, raza vectoare a punctului suprafeţei parametrizate este o funcţie în raport cu coordonatele curbilinii ale acestui punct. Relaţia

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \tag{2.2}$$

ce determină această dependenţă funcţională, este echivalentă cu (2.1) şi se numeşte *ecuaţie parametrică a suprafeţei.*

1.2. Suprafaţă simplă

Definiţia 2.3. *Mulţimea* Φ *de puncte din spaţiu se numeşte suprafaţă simplă, dacă mulţimea* Φ *este conexă şi fiecare punct* $x \in \Phi$ *are vecinătatea* G *astfel, încît, porţiunea din* Φ *situată în* G*, va fi o suprafaţă elementară.*

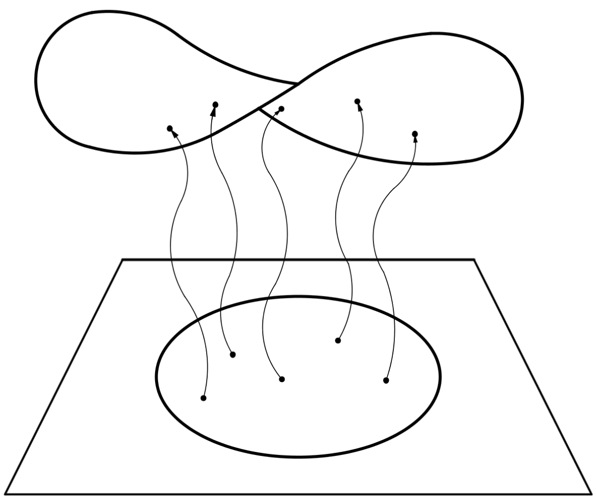


Figura 2.2: Suprafaţă simplă

O suprafaţă simplă este obţinută prin deformare continuă (întindere, comprimare şi îndoire) a unei părţi de plan. În timpul procesul acestei deformări punctul planului se mişcă de-a lungul unui traseu şi trece într-un anumit punct de pe suprafaţă (figura 2.2).

Exemplul 2.2. *Fie*

$$P = \{(u, v) : 0 < u < 4\pi, 0 < v < 1\}$$

un dreptunghi deschis pe planul (uv). *Sistemul*

$$x = ucosu, \ y = usinu, \ z = v$$

defineşte în spaţiul E^3 *o suprafaţă simplă (figura 2.3).*

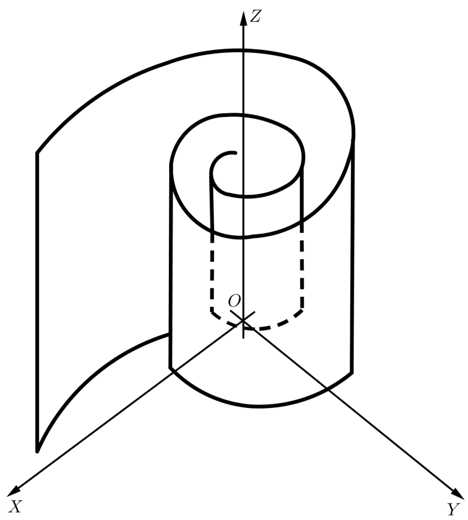


Figura 2.3: Suprafaţă cilindrică cu directoarea de formă spirală

Suprafaţă elementară este o suprafaţă simplă. Însă suprafeţele elementare nu reprezintă toate suprafeţele simple. De exemplu, sfera este suprafaţă simplă, dar nu este suprafaţă elementară.

O idee despre varietatea suprafeţelor simple ne dă următoarea afirmaţie.

Propoziţia 2.1. *Dacă dintr-o suprafaţă simplă arbitrară vom înlătura orice mulţime închisă fără a schimba conexitatea părţii rămase, atunci acestă parte rămasă va fi de asemenea o suprafaţă simplă.*

Definiţia 2.4. *Suprafaţa simplă se numeşte completă, dacă punctul de limită al oricărui şir convergent de puncte de pe suprafaţă de asemenea va fi un punct de pe suprafaţă.*

Exemplul 2.3. *Suprafaţă completă: sfera, paraboloid.*
Suprafaţă incompletă: calotă sferică (fără cercul ce-l mărgineşte).

Dacă suprafaţa simplă completă este finită, atunci suprafaţa se numeşte *închisă*.

Exemplul 2.4. *Suprafaţă închisă: sfera, tor (figura 2.4).*

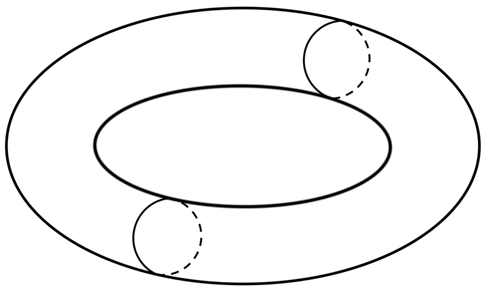


Figura 2.4: Tor - suprafaţă închisă

1.3. Suprafaţă generală

Definiţia 2.5. *Partea comună a suprafeţei simple Φ şi a unei vecinătăţi spaţiale a punctului x se numeşte vecinătatea punctului x pe suprafaţa simplă Φ.*

Conform definiţiei orice punct al suprafeţei simple posedă vecinătate, care este suprafaţă elementară. În continuare, vorbind despre vecinătatea punctului pe suprafaţă, vom avea în vedere astfel de vecinătate elementară.

Definiţia 2.6. *Mulţimea Φ de puncte din spaţiu se numeşte suprafaţă generală, dacă Φ este imaginea suprafeţei simple la aplicaţia local topologică a acestei mulţimi în spaţiu.*

Vom spune, că aplicaţia f_1 a suprafeţei simplei Φ_1 şi aplicaţia f_2 a suprafeţei simplei Φ_2 determină una şi aceeaşi suprafaţă generală Φ, dacă înre punctele suprafeţelor Φ_1 şi Φ_2 putem stabili o corespondenţă topologică, la care imaginile punctelor respective ale acestor suprafeţe pe suprafaţa Φ coincid.

Studiind suprafeţele elementare, simple şi generale putem spune, că studierea oricărei suprafeţe se reduce la cercetarea suprafeţei elementare.

2. Suprafaţă regulată

Din definiţia suprafeţei generale rezultă, că orice punct al ei posedă vecinătatea, care reprezintă suprafaţa elementară.

Definiţia 2.7. *Suprafaţa Φ se numeşte regulată (de k ori diferenţiabilă), dacă fiecare punct al acestei suprafeţe are vecināte ce admite parametrizare regulată, adică definirea prin ecuaţiile în forma parametrică (2.1)*

$$x = f_1(u, v),\ y = f_2(u, v),\ z = f_3(u, v),$$

unde f_1, f_2, f_3 - funcţii regulate (de k ori continuu diferenţiabile), definite în domeniul elementar G al planului (uv).

Pentru $k = 1$ suprafaţa Φ se numeşte *netedă.*

Definiţia 2.8. *Suprafaţa Φ se numeşte analitică, dacă în vecinătatea suficient de mică a fiecărui punct al său, această curbă admite parametrizare analitică (funcţiile f_1, f_2, f_3 - analitice).*

În continuare vom cerceta numai suprafeţe regulate.

Cunoaştem, că o suprafaţă în vecinătatea fiecărui punct al său poate fi definită prin ecuaţiile în formă parametrică:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),$$

unde $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ - funcţiile regulate în raport cu variabilele u şi v, definite într-un domeniu G al planului (uv).

Este evidentă întrebarea, cînd sistemul de egalităţi

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),$$

defineşte o suprafaţă?

Răspuns la această întrebare ne dă următoarea teoremă.

Teorema 2.1. *Dacă $x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)$ - funcţiile regulate definite într-un domeniu G al planului (uv), ce satisfac condiţia, că rangul matricei*

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

peste tot în G este egal cu 2, atunci sistemul de egalităţi

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$$

defineşte o suprafaţă Φ. Această suprafaţă este imaginea suprafeţei simple G la aplicaţia local topologică, care punctului $(u,v) \in G$ îi pune în corespondenţă punctul spaţial cu coordonatele $x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)$.

3. Definirea analitică a suprafeţei. Parametrizări speciale ale suprafeţei

3.1. Definirea analitică a suprafeţei

Unele suprafeţe la alegerea potrivită a axelor de coordonate $x,\ y,\ z$ admit parametrizarea de tipul

$$x = u,\ y = v,\ z = f(u,v),$$

unde $f(u,v)$ - funcţia definită în domeniul G al planului (uv). Ecuaţiile acestei suprafeţe pot fi înscrise într-o formă echivalentă

$$z = f(x,y).$$

În continuare vom cerceta definirea implicită a suprafeţei.

Definiţia 2.9. *Vom spune, că suprafaţa Φ este definită de ecuaţia*

$$\varphi(x,y,z) = 0,$$

exprimînd prin aceasta doar faptul că coordonatele punctelor suprafeţei satisfac ecuaţia dată.

Cu toate acestea, pot exista puncte din spaţiu, care satisfac ecuaţia dată, însă nu aparţin suprafeţei Φ.

La studierea suprafeţelor, definite de ecuaţia $\varphi(x,y,z) = 0$, un rol important îl are următoarea teoremă.

Teorema 2.2. *Fie $\varphi(x,y,z)$ - o funcţie regulată în raport cu variabilele $x,\ y$ şi z. Fie M - mulţimea punctelor din spaţiu, ce satisfac ecuaţia*

$$\varphi(x,y,z) = 0;$$

$(x_0,y_0,z_0) \in M$ - punctul acestei mulţimi, în care ${\varphi_x}^2 + {\varphi_y}^2 + {\varphi_z}^2 \neq 0$. Atunci punctul (x_0,y_0,z_0) posedă vecinătate astfel, încît toate punctele mulţimii M ce aparţin ei, alcătuiesc o suprafaţă elementară regulată.

3.2. Parametrizări speciale ale suprafeței

Propoziţia 2.2. *Suprafaţa regulată în vecinătatea fiecărui punct al său admite o infinitate de parametrizări.*

La studierea suprafeţelor regulate este foarte util să folosim parametrizări speciale. Să cercetăm cele mai aplicabile din ele.

Teorema 2.3. *Fie* Φ *- o suprafaţa regulată şi*

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$$

o parametrizare regulată arbitrară a ei în vecinătatea punctului P*. Fie în punctul* P

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Atunci în vecinătatea punctului P *suprafaţa* Φ *admite definirea prin ecuaţia*

$$z = f(x, y),$$

unde f *- funcţie regulată.*

Teorema 2.4. *Fie* Φ *- o suprafaţa regulată şi* u, v *- parametrizarea ei regulată. Fie în vecinătatea punctului* (u_0, v_0) *sunt definite două ecuaţii diferenţiale*

$$\begin{cases} A_1(u,v)du + B_1(u,v)dv = & 0 \\ A_2(u,v)du + B_2(u,v)dv = & 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

coeficienţii cărora în (u_0, v_0) *satisfac condiţia*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Atunci în vecinătatea acestui punct suprafaţa Φ *poate fi parametrizată astfel, încît liniile de coordonate să fie curbele integrale ale ecuaţiilor (2.3).*

Remarca 2.1. *Sistemul (2.3) foarte des este definit de o singură ecuaţie de gradul doi:*

$$Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2 = 0.$$

Condiţia respectivă pentru coeficienţii ecuaţiei date este:

$$AC - B^2 < 0.$$

4. Planul tangent și normala la o suprafață

Fie Φ - suprafaţă, $P \in \Phi$, α - planul ce trece prin punctul P (figura 2.5). Vom lua pe suprafaţă punctul Q şi vom nota

$$h = \rho(Q, \alpha),\ d = \rho(Q,\ P).$$

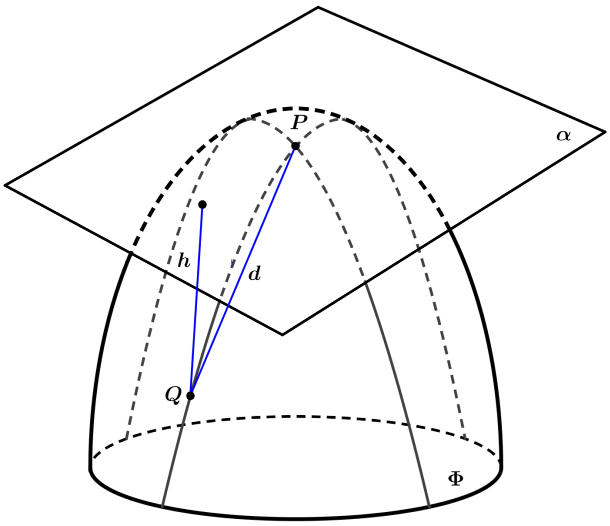


Figura 2.5: Planul tangent la o suprafaţă

Definiţia 2.10. *Planul α se numeşte planul tangent la suprafaţa Φ în punctul P, dacă*

$$\lim_{Q\to P}\frac{h}{d}=0.$$

Teorema 2.5. *Suprafaţa netedă Φ are în orice punct al său planul tangent şi numai unul singur.*

Dacă

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$$

este o parametrizare netedă arbitrară a suprafeţei, atunci planul tangent în punctul $P(u,v)$ este paralel cu vectorii $\mathbf{r}'_u(u,v)$ şi $\mathbf{r}'_v(u,v)$.

Demonstraţie. Presupunem, că suprafaţa Φ în punctul $P(u,v)$ are planul tangent α. Fie $\vec{n}$ - vector normal al planului tangent α ($|\vec{n}|=1$, $\vec{n}\perp\alpha$), $Q(u+\Delta u, v+\Delta v)$.

$$d=\rho(Q,P)=\left|\mathbf{r}(u+\Delta u,v+\Delta v)-\mathbf{r}(u,v)\right|,$$

$$h=pr_{\vec{n}}\vec{PQ}=\left|(\mathbf{r}(u+\Delta u,v+\Delta v)-\mathbf{r}(u,v),\vec{n})\right|.$$

Astfel

$$\frac{h}{d}=\frac{|(\mathbf{r}(u+\Delta u,v+\Delta v)-\mathbf{r}(u,v),\vec{n})|}{|\mathbf{r}(u+\Delta u,v+\Delta v)-\mathbf{r}(u,v)|}.$$

Conform definiţiei $\frac{h}{d}\to 0$ pentru Δu, $\Delta v\to 0$. În particular,

$$\frac{|(\mathbf{r}(u+\Delta u,v)-\mathbf{r}(u,v),\vec{n})|}{|\mathbf{r}(u+\Delta u,v)-\mathbf{r}(u,v)|}\to 0,\ \ \Delta u\to 0.$$

Dar

$$\frac{|(\mathbf{r}(u+\Delta u,v)-\mathbf{r}(u,v),\vec{n})|}{|\mathbf{r}(u+\Delta u,v)-\mathbf{r}(u,v)|}=\frac{\left|\left(\frac{\mathbf{r}(u+\Delta u,v)-\mathbf{r}(u,v)}{\Delta u},\vec{n}\right)\right|}{\left|\frac{\mathbf{r}(u+\Delta u,v)-\mathbf{r}(u,v)}{\Delta u}\right|}\to\frac{|(\mathbf{r}_u(u,v),\vec{n}))|}{|\mathbf{r}_u(u,v)|}.$$

Deci,

$$(\mathbf{r}_u(u,v),\vec{n}))=0.$$

Deoarece

$$\mathbf{r}_u(u,v) \neq 0$$

$(\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v) \neq 0)$, atunci egalitatea $(\mathbf{r}_u(u,v), \vec{n}) = 0$ are loc numai în cazul, cînd

$$\mathbf{r}_u(u,v) \parallel \alpha.$$

În mod analogic se arată, că

$$\mathbf{r}_v(u,v) \parallel \alpha.$$

Şi deoarece $\mathbf{r}_u(u,v)$, $\mathbf{r}_v(u,v) \neq 0$ şi neparaleli $(\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v) \neq 0)$, rezultă că planul tangent (dacă există) este unic.

Vom demonstra acum existenţa planului tangent. Fie $\alpha \parallel \mathbf{r}_u(u,v)$, $\mathbf{r}_v(u,v)$. Vom arăta, că α este planul tangent la suprafaţa Φ în punctul $P(u,v)$. Avem:

$$\frac{h}{d} = \frac{|(\mathbf{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \mathbf{r}(u,v), \vec{n})|}{|\mathbf{r}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \mathbf{r}(u,v)|} =$$

$$= \frac{\left|(\mathbf{r}_u, \vec{n})\,\Delta u + (\mathbf{r}_v, \vec{n})\,\Delta v + \vec{\varepsilon}_1\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}\right|}{\left|\mathbf{r}_u \Delta u + \mathbf{r}_v \Delta v + \vec{\varepsilon}_2\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}\right|} =$$

$$= \frac{\left|(\mathbf{r}_u, \vec{n})\,\frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}} + (\mathbf{r}_v, \vec{n})\,\frac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}} + \vec{\varepsilon}_1\right|}{\left|\mathbf{r}_u \frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}} + \mathbf{r}_v \frac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}} + \vec{\varepsilon}_2\right|},$$

unde $|\vec{\varepsilon}_1|$, $|\vec{\varepsilon}_2| \to 0$ pentru Δu, $\Delta v \to 0$.

Presupunem, că există şirul perechilor Δu, $\Delta v \to 0$ pentru care $\frac{h}{d} > \varepsilon > 0$. Din şirul perechilor Δu, Δv putem extrage un subşir pentru care rapoartele

$$\frac{\Delta u}{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}}, \ \frac{\Delta v}{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}}$$

vor converge la ξ, η respectiv. Este evident, că $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Trecînd la limită, vom primi

$$\frac{h}{d} = \frac{|(\mathbf{r}_u, \vec{n})\,\xi + (\mathbf{r}_v, \vec{n})\,\eta|}{|\mathbf{r}_u \xi + \mathbf{r}_v \eta|}.$$

Deoarece $(\mathbf{r}_u, \vec{n}) = 0$, $(\mathbf{r}_v, \vec{n}) = 0$, $\mathbf{r}_u\xi + \mathbf{r}_v\eta \neq 0$ ($\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ neparaleli), atunci $\frac{h}{d} \to 0$, ceea ce contrazice faptului că $\frac{h}{d} > \varepsilon > 0$.

Teorema este demonstrată complet.

□

Definiţia 2.11. *Perpendiculara pe planul tangent al suprafeţei Φ în punctul P se numeşte normala la suprafaţă.*

4.1. Ecuațiile planului tangent și normalei la o suprafață

1. $\Phi : z = z(x,y)$ - suprafaţa definită în mod explicit

Ecuaţia planului tangent:

$$\boxed{z_x(x_0,y_0)(x-x_0) + z_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0}$$

Ecuaţia normalei:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{z_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{z_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}}$$

2. $\Phi : F(x,y,z)=0$ - suprafaţa definită în mod implicit
Ecuaţia planului tangent:

$$\boxed{F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0}$$

Ecuaţia normalei:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}}$$

3. $\Phi : x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v)$ - suprafaţa definită în mod parametric
Ecuaţia planului tangent:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x(u_0,v_0) & y-y(u_0,v_0) & z-z(u_0,v_0) \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}=0}.$$

Ecuaţia normalei:

$$\boxed{\frac{x-x(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}}=\frac{y-y(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} z_u(u_0,v_0) & x_u(u_0,v_0) \\ z_v(u_0,v_0) & x_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}}=\frac{z-z(u_0,v_0)}{\begin{vmatrix} x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}}}$$

Exerciţiul 2.1. *Determinaţi ecuaţiile planului tangent şi planului normal ale elipsoidului în punctul (x',y',z'):*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Exerciţiul 2.2. *Alcătuiţi ecuaţiile planului tangent şi planului normal ale sferei:*

$$x=a\sin u\cos v,\ y=a\sin u\sin v,\ z=a\cos u$$

în punctul $A(a,0,0)$.

5. Lema despre distanță de la punct la suprafață. Tangența curbei și suprafeței

5.1. Lema despre distanță de la punct la suprafață

Fie Φ - o suprafaţă, Q - un punct arbitrar din spaţiu, $Q\notin\Phi$.

Definiţia 2.12. *Vom numi distanţa de la punctul Q pînă la suprafaţa Φ limita inferioară exactă a distanţelor punctelor suprafeţei pînă la punctul Q.*

Lema 2.1. *Fie Φ - o suprafaţă netedă, definită de ecuaţia $\varphi(x, y, z) = 0$. Fie în punctul $O(x_0, y_0, z_0)$, $O \in \Phi$:*

$$\varphi_x{}^2 + \varphi_y{}^2 + \varphi_z{}^2 \neq 0.$$

Dacă $Q(x, y, z)$ - un punct din spaţiu, situat aproape de O, $Q \notin \Phi$, atunci la înlocuirea coordonatelor punctului Q în ecuaţia suprafeţei Φ, vom primi mărimea λ, care are ordinul mărimii h - distanţei de la Q la Φ în sensul că raportul $\frac{\lambda}{h}$ tinde la o anumită limită nenulă, cînd Q se apropie nemărginit de O, în afara suprafeţei Φ (figura 2.6).

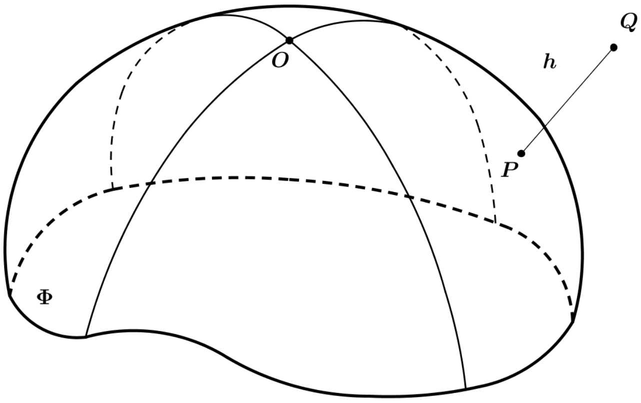


Figura 2.6: Distanţa de la punct la suprafaţă

Vom aplica această lemă la întrebarea despre tangenţa curbei şi suprafeţei.

5.2. Tangența curbei și suprafeței

Fie Φ - suprafaţa elementară, γ - curba elementară au punctul comun O. Vom nota:

$$h = \rho(Q, \Phi),\ d = \rho(Q,\ O).$$

Definiţia 2.13. *Vom spune, că curba γ are tangenţă de ordinul n cu suprafaţa Φ (figura 2.7), dacă*

$$\lim_{Q \to O} \frac{h}{d^n} = 0.$$

Prin tangenţa curbei generale cu suprafaţa generală vom întelege tangenţa vecinătăţilor elementare ele punctului lor comun.

Teorema 2.6. *Fie Φ - suprafaţa elementară regulată şi γ - curba regulată, ce au punctul comun O.*

Fie $\varphi(x, y, z) = 0$ - ecuaţia suprafeţei Φ în vecinătatea punctului O şi $\varphi_x{}^2 + \varphi_y{}^2 + \varphi_z{}^2 \neq 0$ în punctul O; $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ - parametrizarea regulată a curbei γ în vecinătatea punctului O şi $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \neq 0$ în punctul O.

Atunci pentru ca curba γ să aibă cu suprafaţa Φ în punctul O tangenţă de ordinul n este necesar şi suficient ca pentru valoarea parametrului t ce corespunde punctului O să fie satisfăcute condiţiile:

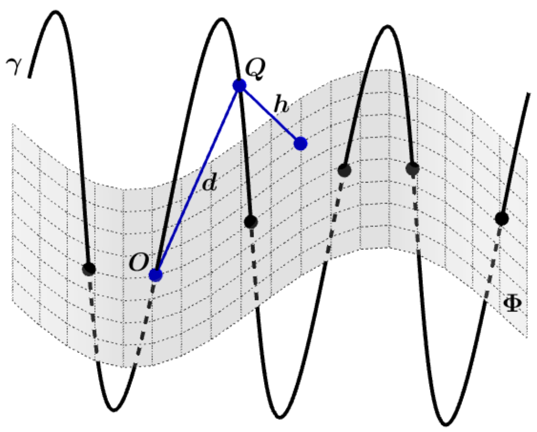


Figura 2.7: Tangenţă de ordinul n a curbei cu suprafaţa

$$\begin{cases} \varphi(x(t), y(t), z(t)) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\varphi(x(t),\ y(t),\ z(t)) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^n}{dt^n}\varphi(x(t),\ y(t)\ , z(t)) = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Exerciţiul 2.3. *Arătaţi, că linia $yz = x,\ xz = y + 1$ are tangenţă de ordinul 2 cu suprafaţa $z = xy$ în punctul $M(0; -1; 0)$.*

6. Paraboloidul osculator. Clasificarea punctelor suprafeței

6.1. Paraboloidul osculator

Fie Φ - suprafaţa regulată (de 2 ori continuu diferenţiabilă) şi punctul $P \in \Phi$. Fie U - un paraboloid cu vîrful în punctul P, tangent cu suprafaţa în punctul dat (figura 2.8). Fie Q - punctul arbitrar al suprafeţei Φ. Vom nota

$$h = \rho(Q, U),\ d = \rho(Q, P).$$

Definiţia 2.14. *Paraboloidul U se numeşte paraboloid osculator al suprafeţei Φ în punctul P, dacă*

$$\lim_{Q \to P} \frac{h}{d^2} = 0.$$

(Nu se exclude cazul cînd paraboloidul U degenerează într-un cilindru parabolic sau un plan.)

Teorema 2.7. *În orice punct P al suprafeţei regulate (de 2 ori continuu diferenţiabile) Φ există şi numai unul singur paraboloid osculator U, în particular degenerat într-un cilindru parabolic sau un plan.*

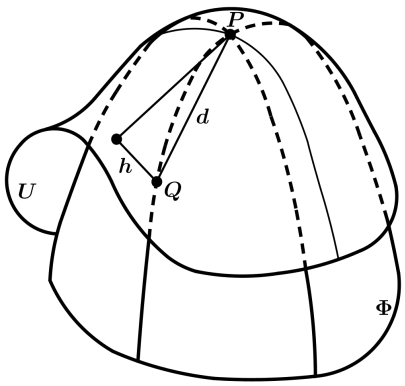


Figura 2.8: Paraboloidul osculator

6.2. Clasificarea punctelor suprafeței

Existenţa şi unicitatea paraboloidului osculator ne permite să clasificăm punctele suprafeţei astfel:

1. puncte eliptice (figura 2.9)

$$z = \frac{1}{2}(\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q});$$

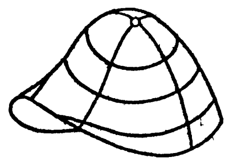


Figura 2.9: Punct eliptic

2. puncte hiperbolice (figura 2.10)

$$z = \frac{1}{2}(\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q});$$

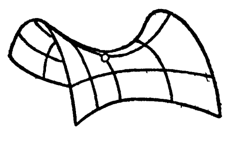


Figura 2.10: Punct hiperbolic

3. puncte parabolice (figura 2.11)

4. puncte de condensare (paraboloidul degenerează într-un plan) (figura 2.12)

7. Prima formă pătratică fundamentală a suprafeței și aplicațiile ei

7.1. Prima formă pătratică fundamentală a suprafeței

Fie Φ - o suprafaţă regulată, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ - o parametrizare regulată a ei şi $\mathbf{n}$ - vectorul unitar al normalei la suprafaţă în punctul (u, v).

$$z = \frac{1}{2}px^2,\ z = \frac{1}{2}qy^2;$$

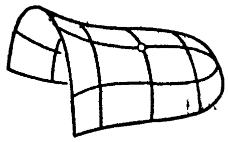
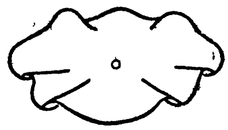


Figura 2.11: Punct parabolic



$$ax + by + cz + d = 0.$$

Figura 2.12: Punct de condensare

Definiţia 2.15. *Expresia*

$$I = d\mathbf{r}^2$$

se numeşte prima formă pătratică fundamentală a suprafeţei Φ. *(*$I \geq 0$.*)*

Să descriem această expresie mai detaliat.

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$$

$$d\mathbf{r}^2 = (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv)^2 = {\mathbf{r}_u}^2 du^2 + 2\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v dudv + {\mathbf{r}_v}^2 dv^2$$

Notăm

$$E = {\mathbf{r}_u}^2,\ F = \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v,\ G = {\mathbf{r}_v}^2,$$

care se numesc *coeficienţii primei formei pătratice fundamentale a suprafeţei.*

Astfel

$$\boxed{I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2},$$

unde $EG - F^2 > 0$.

Prima formă pătratică fundamentală a suprafeţei joacă un rol important în teoria suprafeţelor.

Exerciţiul 2.4. *Calculaţi prima formă pătratică a sferei:*

$$x = R\sin u\cos v,\ y = R\sin u\sin v,\ z = R\cos u.$$

7.2. Aplicațiile primei forme pătratice fundamentale a suprafeței

- *LUNGIMEA curbei pe suprafaţă*

  Fie Φ - o suprafaţă regulată şi $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ - o parametrizare regulată a acesteia. Fie γ - o curbă regulată situată pe suprafaţa Φ, definită de ecuaţiile $u = u(t),\ v = v(t)$. Vom determina expresia lungimii arcului de curbă cu capetele în punctele $P_0(t_0)$ şi $P(t)$.

  Avem

$$s(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{r}'(u(t),\ v(t))|\, dt = \int_{t_0}^{t} |d\mathbf{r}(u, v)| =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \sqrt{d\mathbf{r}^2(u,v)} = \int_{t_0}^{t} \sqrt{I},$$

unde I - prima formă pătratică fundamentală a suprafeţei.

Astfel

$$\boxed{s(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{I}}.$$

Observăm, că pentru măsurarea lungimilor curbelor pe suprafaţă este suficient să cunoaştem prima formă pătratică fundamentală a suprafeţei. Astfel, se spune că prima formă pătratică a suprafeţei defineşte metrica suprafeţei, şi foarte des aceasta se mai numeşte *elementul liniar al suprafeţei.*

Prima formă pătratică nu determină suprafaţa univoc. Este uşor de descris exemple de diferite suprafeţe, care la o parametrizare corespunzătoare vor avea primele forme pătratice identice. Dar pentru două suprafeţe arbitrare, în general, nu există parametrizări, pentru care primele forme pătratice să coincide.

Exerciţiul 2.5. *Pe helicoidul drept* $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$ *sunt definite liniile*

$$v = \ln(u \pm \sqrt{u^2 + a^2}) + C.$$

Calculaţi lungimile arcelor acestor linii între două puncte $M_1(u_1, v_1)$ *şi* $M_2(u_2, v_2)$.

- *UNGHIUL dintre curbe pe suprafaţă*

Definiţia 2.16. *Direcţia vectorului* $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$ *se numeşte direcţia* $(du : dv)$ *pe suprafaţa* Φ, *definită de ecuaţia* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$.

Această direcţie uneori se va numi (d).

Definiţia 2.17. *Unghiul dintre vectorii*

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$$

şi

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_u \delta u + \mathbf{r}_v \delta v$$

se numeşte unghiul dintre direcţiile $(du : dv)$ *şi* $(\delta u : \delta v)$.

Să determinăm expresia pentru unghiul dintre direcţiile (d) şi (δ).

Avem

$$(d\mathbf{r},\ \delta\mathbf{r}) = |d\mathbf{r}|\,|\delta\mathbf{r}|\cos\theta,$$

$$d\mathbf{r}^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = I(d),$$

$$\delta\mathbf{r}^2 = E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2 = I(\delta),$$

$$(d\mathbf{r},\ \delta\mathbf{r}) = Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = I(d, \delta).$$

De aici pentru $\cos\theta$ primim următoarea expresie:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{I(d,\delta)}{\sqrt{I(d)\cdot I(\delta)}}}.$$

Exerciţiul 2.6. *Determinaţi unghiul dintre liniile* $v = 2u, v = -2u$ *pe suprafaţa cu prima formă pătratică*

$$I = du^2 + dv^2.$$

Definiţia 2.18. *Vom spune, că curba* γ *pe suprafaţa* Φ *definită de ecuaţia* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ *în punctul* (u, v) *are direcţia* $(du : dv)$*, dacă vectorul* $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$ *este vectorul tangent al curbei în punctul dat.*

Curba definită pe suprafaţă de ecuaţiile $u = u(t), v = v(t)$ în punctul $(u(t), v(t))$ are direcţia $(u'(t) : v'(t))$.

Definiţia 2.19. *Vom numi unghi în punctul* (u, v) *dintre două curbe* γ *şi* $\bar{\gamma}$ *pe suprafaţa* Φ *cu punctul comun* (u, v)*, unghiul dintre direcţiile curbelor în punctul dat.*

Astfel, unghiul dintre curbe pe suprafaţă este unghiul dintre tangentele curbelor şi, prin urmare, unghiul nu depinde nici de parametrizarea suprafeţei, nici de parametrizarea curbei.

Exemplul 2.5. *Liniile de coordonate (liniile* $u = const$ *şi liniile* $v = const$*) au direcţiile* $(0 : dv)$ *şi* $(\delta u : 0)$*. De aceea, pentru unghiul dintre liniile de coordonate obţinem:*

$$\cos\theta = \frac{F dv \delta u}{\sqrt{G dv^2} \cdot \sqrt{E \delta u^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Prin urmare, liniile de coordonate pe suprafaţă sunt ortogonale atunci şi numai atunci cînd $F = 0$.

- *ARIA domeniului închis pe suprafaţaă*

  Aria σ a domeniului închis D pe suprafaţă, ce este imaginea domeniului închis D' în raport cu funcţia vectorială $\mathbf{r}$ (adică $D = \mathbf{r}(\mathbf{D}')$), se calculeaza după formulă:

$$\boxed{\sigma = \iint\limits_{(D)} \sqrt{EG - F^2} du dv}.$$

Exerciţiul 2.7. *Calculaţi aria patrulaterului situat pe helicoidul drept* $x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = av$*, mărginit de liniile* $u = o, u = a, v = 0, v = 1$.

8. A doua formă pătratică fundamentală a suprafeţei şi aplicaţiile ei

8.1. A doua formă pătratică fundamentală a suprafeţei

Fie Φ - o suprafaţă regulată, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ - o parametrizare regulată a ei şi $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v)$ - vectorul unitar al normalei la suprafaţă în punctul $P(u, v)$.

Definiţia 2.20. *Expresia*

$$II = -(d\mathbf{r}, d\mathbf{n})$$

se numeşte a doua formă pătratică fundamentală a suprafeţei Φ.

Să descriem această expresie mai detaliat.

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$$

$$d\mathbf{n} = \mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv$$

$$-(d\mathbf{r}, d\mathbf{n}) = -(\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv, \mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv) =$$

$$= -(\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u)du^2 + (-(\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v) - (\mathbf{r}_v, \mathbf{n}_u))dudv - (\mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v)dv^2$$

Notăm

$$L = -(\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u),\ 2M = -(\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v) - (\mathbf{r}_v, \mathbf{n}_u),\ N = -(\mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v),$$

care se numesc *coeficienţii celei de-a doua forme pătratice fundamentale a suprafeţei.*

Astfel

$$\boxed{II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}.$$

Deoarece din definiţia vectorului normal

$$(d\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0,$$

prin urmare

$$d(d\mathbf{r}, \mathbf{n}) = 0$$

sau

$$(d^2\mathbf{r}, \mathbf{n}) + (d\mathbf{r}, d\mathbf{n}) = 0$$

sau

$$-(d\mathbf{r}, d\mathbf{n}) = (d^2\mathbf{r}, \mathbf{n})$$

sau

$$II = (d^2\mathbf{r}, \mathbf{n}).$$

Astfel,

$$II = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n})du^2 + 2(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n})dudv + (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n})dv^2,$$

unde

$$L = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}),\ M = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}),\ N = (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}).$$

Deoarece

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|}, \qquad |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| = \sqrt{EG - F^2},$$

avem

$$L = \frac{(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$M = \frac{(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$N = \frac{(\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

În particular, dacă suprafaţa Φ este definită de ecuaţia $z = z(x, y)$, atunci

$$L = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}},$$

$$M = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}},$$

$$N = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}.$$

Exerciţiul 2.8. *Calculaţi a doua formă fundamentală pătratică a suprafeţei elicoidale*

$$x = u\cos v, \; y = u\sin v, \; z = v.$$

8.2. Aplicațiile celei de-a doua forme pătratice fundamentale a suprafeței

- *Curburile principale normale* $k_1, \; k_2$

$$\boxed{(EG - F^2)k^2 - (EN + LG - 2FM)k + (LN - M^2) = 0}$$

- *Curbura totală (Gauss)* K

$$\boxed{K = k_1 \cdot k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}}$$

- *Curbura medie* H

$$\boxed{H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{EN + LG + 2FM}{2(EG - F^2)}}$$

Exerciţiul 2.9. *Determinaţi curburile principale normale ale paraboloidului* $z = a(x^2 + y^2)$ *în punctul* $(0, 0, 0)$.

Exerciţiul 2.10. *Determinaţi curbura gaussiană şi medie a paraboloidului* $z = axy$ *în punctul* $x = y = 0$.

Modulul II. TOPOLOGIE

Unitatea de conținut III. DATELE DE BAZĂ DIN TEORIA MULȚIMILOR

1. Noțiune de mulțime. Submulțimi

Conform definiţiei creatorului teoriei mulţimilor, Georg Cantor (1845-1918), mulţimea este "o colecţie de obiecte bine determinate, distincte ale intuiţiei sau gîndirii noastre, considerate ca un tot".

Remarca 3.1. *Vom evidenţia următoarele momente:*

1. *Definiţia adusă mai sus nu este strictă, deoarece noţiunea de "mulţime" se defineşte prin noţiunea de "colecţie", sensul exact al căreia nu este determinat. In genere, orice altă "definiţie" a mulţimii ar conduce la definiţia ei prin ea însăşi - printr-un sinonim. Este o situaţie naturală - noţiunea de mulţime este o noţiune primară, la fel cum punctul, dreapta sau planul în geometrie.*

   În teoriile axiomatice stricte, noţiunea de "mulţime" se defineşte indirect, prin proprietăţile ce le verifică.

   Punctul de vedere pe care îl vom adopta în lucrarea de faţă constituie "teoria naivă" a mulţimilor, vom evita construcţii axiomatice stricte. Aşa o abordare va înlesni înţelegerea, iar afirmaţiile ce se vor obţine în aşa mod pot fi demonstrate şi din punct de vedere al teoriilor axiomatice formale.

2. *O mulţime de obiecte se consideră ca un singur obiect.*

3. *Nu se impune nici o restricţie asupra elementelor mulţimii, adică asupra obiectelor ce alcătuiesc mulţimea. Obiectele au doar calitatea de a aparţine sau ba mulţimii.*

4. *Nu importă ordinea în care elementele întră în mulţime.*

5. *Pentru a defini o mulţime, este necesar de a defini elementele ce intră în această mulţime.*

În continuare, de regulă, vom nota mulţimile cu litere mari: $A, B, C, \ldots Z$ (pot fi utilizate alfabete diverse sau simboluri grafice etc.), iar elementele mulţimii cu litere mici: $a, b, c, \ldots z$.

Dacă obiectul a aparţine mulţimii A, adică a este un element al mulţimii A, vom scrie $a \in A$. Dacă obiectul a nu se găseşte în mulţimea A, vom scrie $a \notin A$. Simbolurile $\in$, $\notin$ se numesc apartenenţă, respectiv neapartenenţă.

Exemplul 3.1. *Vom descrie unele exemple de mulţimi:*

1. *Mulţimea cifrelor sistemului zecimal de numeraţie*

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

2. *Mulţimea numerelor naturale*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

3. *Mulţimea numerelor naturale pozitive*

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

4. *Mulţimea numerelor întregi*

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}.$$

5. *Mulţimea numerelor raţionale*

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

6. *Mulţimea numerelor reale. Această mulţime se notează prin $\mathbb{R}$ şi se defineşte strict în cursul de analiză matematică. Elementele acestei mulţimi sunt toate numerele raţionale şi iraţionale (adică numerele ce nu pot fi reprezentate ca raportul dintre un număr întreg şi un număr natural pozitiv). Exemple de numere reale:*

$$-3,\ \frac{5}{7},\ 17,\ 3\frac{1}{2},\ \ln 6,\ \pi,\ -\sin 1,\ e.$$

7. *Mulţimea numerelor complexe*

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}, \textit{unde} \quad i^2 = -1.$$

8. *Mulţimea*

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{Z},\ x^2 + y^2 + z^2 = 30\}.$$

9. *Mulţimea tuturor fulgilor de zăpadă din anul trecut.*

10. *Mulţimea tuturor cuvintelor din această lucrare.*

11. *Mulţimea triunghiurilor din plan.*

O mulţime se consideră definită, dacă există un criteriu, după care deosebim elementele mulţimii de celelalte obiecte ce nu fac parte din mulţime. În acest sens, o mulţime poate fi definită

1. enumerînd elementele mulţimii;

2. prin specificarea unei proprietăţi caracteristice ale elementelor sale.

O mulţime determinată prin enumerarea elementelor sale se notează scriind între acolade elementele sale, separate prin virgule (vezi exemplul 1 de mai sus). Mulţimile definite prin specificarea proprietăţii P se vor nota prin

$$A = \{x : P(x)\},$$

adică mulţimea acelor obiecte x, pentru care are loc $P(x)$ (vezi exemplul 3).

Definiţia 3.1. *(Relaţia de egalitate) Două mulţimi A şi B se numesc egale dacă orice element al lui A aparţine lui B şi reciproc.*

Cînd două mulţimi A şi B sunt egale, vom scrie $A = B$, în caz contrar $A \neq B$.

Exemplul 3.2. $A = \{x : x \in \mathbb{Z},\ x^2 = 4\}$, $B = \{-2, 2\}$, $A = B$.

Definiţia 3.2. *Fie A şi B două mulţimi. Se spune că A este o submulţime a lui B, sau este inclusă în B şi se notează $A \subset B$, dacă fiecare element al mulţimii A aparţine mulţimii B, adică*

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Exemplul 3.3. $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Definiţia 3.3. *Mulţimea, care nu conţine nici un element se numeşte mulţime vidă.*

Mulţimea vidă se notează cu simbolul $\varnothing$.

Exemplul 3.4. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$.

Mulţimea vidă este submulţimea a oricărei mulţimi.

Dacă mulţimea A are n elemente, atunci numărul de submulţimi al mulţimii A este egal cu 2^n. Mulţimea tuturor submulţimilor mulţimii A se notează prin $\mathcal{P}(A)$.

Exemplul 3.5. *Pentru mulţimea $A = \{1, 2, 3\}$ alcătuită din 3 elemente vom avea*

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

2. Operații cu mulțimi

Definiţia 3.4. *Reuniune a mulţimilor A şi B se numeşte mulţimea notată cu $A \cup B$ şi definită astfel*

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

adică $A \cup B$ este mulţimea elementelor ce aparţin cel puţin uneia din mulţimile A şi B (figura 3.1).

Exemplul 3.6. *Pentru $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ avem*

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

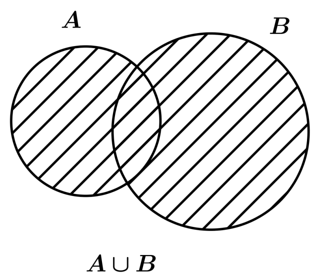


Figura 3.1: Reuniunea a două mulţimi

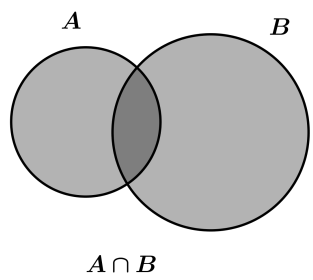


Figura 3.2: Intersecţia a două mulţimi

Definiţia 3.5. *Intersecţie a mulţimilor A şi B se numeşte mulţimea notată cu $A \cap B$ şi definită astfel*

$$A \cap B = \{x : x \in A \; si \; x \in B\}$$

adică $A \cap B$ este mulţimea elementelor ce aparţin şi lui A, şi lui B (partea comună a mulţimilor) (figura 3.2).

Exemplul 3.7. $(-\infty, 1] \cap (-2, 7] = (-2, 1]$.

Definiţia 3.6. *Două mulţimi A şi B, care nu au elemente comune (adică $A \cap B = \varnothing$) se numesc disjuncte.*

Definiţia 3.7. *Diferenţă a mulţimilor A şi B se numeşte mulţimea notată cu $A \setminus B$ şi definită astfel*

$$A \;\; B = \{x : x \in A \; si \; x \notin B\}$$

adică $A \setminus B$ este mulţimea elementelor din A ce nu aparţin lui B (figura 3.3).

Exemplul 3.8. $(-5, 1] \setminus (-2, 1] = (-5, -2]$.

Definiţia 3.8. *Diferenţă simetrică a mulţimilor A şi B se numeşte mulţimea*

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(figura 3.4).

Exemplul 3.9. $(-\infty, 2] \setminus [-3, 5) = (-\infty, -3) \cup (2, 5)$.

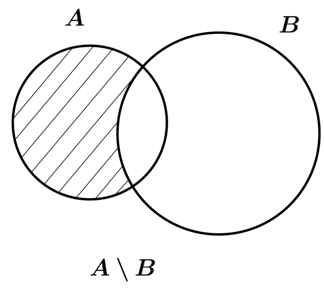


Figura 3.3: Diferenţa a două mulţimi

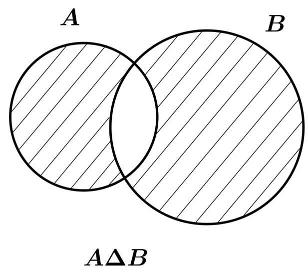


Figura 3.4: Diferenţa simetrică a două mulţimi

Definiţia 3.9. *Fie T o mulţime, iar A o submulţime a acesteia, $A \subset T$. Mulţimea*

$$C_T(A) = \{x : x \in T,\ x \notin A\}$$

se numeşte complimentara mulţimii A în raport cu T (figura 3.5).

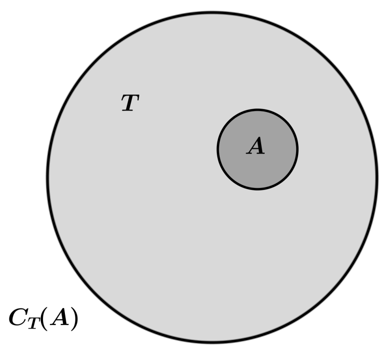


Figura 3.5: Diferenţa simetrică a două mulţimi

Exemplul 3.10. $C_{\mathbb{R}}[1, +\infty) = (-\infty, 1)$.

Definiţia 3.10. *Fie x şi y două obiecte. Se numeşte pereche ordonată a obiectelor x şi y mulţimea notată (x, y) şi definită astfel:*

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Definiţia 3.11. *Produs cartesian al mulţimilor A şi B se numeşte mulţimea*

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A,\ y \in B\}.$$

Exemplul 3.11. *Pentru $A = \{1, 2\},\ B = \{5, 6, 7\}$ avem*

$$A \times B = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (2, 7)\}.$$

Produsul cartesian $A \times A$ se notează A^2.

3. Noţiune de funcţie

Definiţia 3.12. *Fie X şi Y două mulţimi. Tripletul ordonat (X, Y, G), unde G este o submulţime a produsului cartesian $X \times Y$, se numeşte corespondenţa de la mulţimea X la mulţimea Y. Mulţimea G se numeşte graficul corespondenţei, X - domeniul corespondenţei, iar Y - codomeniul corespondenţei (domeniul de valori).*

Exemplul 3.12. *Fie $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c\}$ şi o submulţime G a produsului cartesian $X \times Y$:*

$$G = \{(1, a), (3, a), (3, b), (2, c)\}.$$

Tripletul $\alpha = (X, Y, G)$ este o corespondenţă de la mulţimea X la mulţimea Y (figura 3.6).

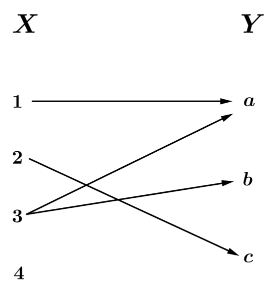


Figura 3.6: Corespondenţa a două mulţimi

Definiţia 3.13. *Corespondenţa $f = (X, Y, G)$ se numeşte funcţie de la mulţimea X la mulţimea Y, dacă se verifică condiţiile:*

- $\forall x \in X\ \exists y \in Y$: $(x, y) \in G$.
- $\forall (x, y'), (x, y'') \in G \Rightarrow y' = y''$.

Mulţimea G se numeşte graficul funcţiei, X - domeniul funcţiei, iar Y - codomeniul funcţiei (domeniul de valori).

Notaţii. Pentru funcţia $f = (X, Y, G)$ se utilizează frecvent notaţiile:

$$f : X \to Y$$

sau

$$X \xrightarrow{f} Y.$$

Dacă $(x, y) \in G$, atunci se spune că y este imaginea lui x prin funcţia f şi se notează $y = f(x)$.

Remarca 3.2. *Din definiţia funcţiei rezultă că funcţiile $f : X_1 \to Y_1$ şi $g : X_2 \to Y_2$ sunt egale dacă şi numai dacă $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ şi $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X_1$.*

Fie $f : X \to Y$ o funcţie, $A \subset X$.

Definiţia 3.14. *Funcţia $g : V \to W$ se numeşte prelungire a funcţiei f, dacă $X \subset V$, $Y \subset W$ şi $\forall x \in X : f(x) = g(x)$.*

Definiţia 3.15. *Funcţia $f|_A : A \to Y$ se numeşte restricţie a funcţiei f la mulţimea A, dacă $f|_A(x) = f(x), \forall x \in A$.*

Exemplul 3.13. *Vom studia următoarele exemple:*

1. *Iniţial, a^p se defineşte ca produsul a p numere, egale toate cu a. Această definiţie presupune $p \in \mathbb{N}$. Apoi se introduce noţiunea de funcţie exponenţială: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 0$. Ultima este o prelungire a primei funcţii.*

2. *Cum $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, funcţia $f(x) = x!$ apriori nu are nici un sens, dacă $x \notin \mathbb{N}$. Această funcţie se prelungeşte la $\mathbb{Z}$ (şi chiar la $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$) prin intermediul funcţiei Γ (funcţia lui Euler de speţa a doua).*

Teorema 3.1. *(Compunerea funcţiilor) Dacă $f = (X, Y, F)$ şi $g = (Y, Z, G)$ sunt două funcţii, atunci corespondenţa $g \circ f$ este o funcţie şi $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Teorema 3.2. *(Inversarea funcţiei) Fie $f = (X, Y, F)$ o funcţie. Atunci corespondenţa $f^{-1} = (Y, X, F^{-1})$ este o funcţie dacă şi numai dacă $f^{-1} \circ f = 1_X$ şi $f \circ f^{-1} = 1_Y$.*

4. Funcții injective, surjective, bijective

Definiţia 3.16. *Funcţia $f : X \to Y$ se numeşte*

1. *surjectivă, dacă $\forall y \in Y$ $\exists x \in X$: $f(x) = y$;*

2. *injectivă, dacă $\forall x_1, x_2 \in X (x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;*

3. *bijectivă, dacă f este şi surjectivă, şi injectivă.*

Exemplul 3.14. *Vom studia următoarele exemple:*

1. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Funcţia f nu este injectivă, deoarece, de exemplu, $-1 \neq 1$, şi totodată, $f(-1) = (-1)^2 = (1)^2 = f(1)$. Această funcţie nu este nici surjectivă, deoarece $\nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = -1$*

2. *Fie* $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$. *Această funcţie nu este injectivă (vezi exemplul precedent), dar este surjectivă, deoarece* $\forall y \in [0, +\infty)$ $\exists x \in \mathbb{R}$ *(de exemplu,* $x = \sqrt{y}$*):* $x^2 = y$.

3. *Fie* $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$. *Această funcţie este surjectivă (vezi exemplul precedent) şi injectivă. Într-adevăr,* $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ $(x_1 \neq x_2)$ *avem* $x_1^2 \neq x_2^2$*, adică* $f(x_1) \neq f(x_2)$*. Fiind surjectivă şi injectivă,* f *este şi bijectivă.*

5. Relaţie binară. Relaţie de ordine. Relaţie de echivalenţă

Fie A o mulţime nevidă.

Definiţia 3.17. *O submulţime nevidă* R *a produsului cartesian* $A \times A$ *se numeşte relaţie binară definită pe mulţimea nevidă* A.

Dacă $(x, y) \in R$ vom scrie xRy şi vom citi: x se află în relaţia R cu y.
O relaţie binară R pe o mulţime nevidă A se numeşte:

- reflexivă, dacă xRx, pentru orice $x \in A$;
- simetrică, dacă $xRy \Rightarrow yRx$, pentru orice $x, y \in A$;
- antisimetrică, dacă (xRy şi yRx) $\Rightarrow x = y$, pentru orice $x, y \in A$;
- tranzitivă, dacă (xRy şi yRz) $\Rightarrow xRz$, pentru orice $x, y, z \in A$.

Definiţia 3.18. *O relaţie binară pe mulţimea nevidă* A *se numeşte relaţie de ordine pe* A*, dacă ea este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.*

Remarca 3.3. *De multe ori relaţia de ordine* R *se notează prin* $\leq$*. Astfel,* xRy *se scrie sub forma* $x \leq y$.

Definiţia 3.19. *Un cuplu* $(A, \leq)$*, unde* A *este o mulţime nevidă, iar* $\leq$ *este o relaţie de ordine pe* A *se numeşte mulţime ordonată.*

Definiţia 3.20. *Muţimea ordonată* $(A, \leq)$ *se numeşte total ordonată dacă pentru orice* $x, y \in A$ *avem* $x \leq y$ *sau* $y \leq x$ *(adică orice două elemente sunt comparabile).*

Definiţia 3.21. *O relaţie* R *pe o mulţime nevidă* A *se numeşte relaţie de echivalenţă dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.*

Exemplul 3.15. *Următoarele relaţii sunt de echivalenţă:*

1. *Relaţia de egalitate a elementelor unei mulţimi arbitrare* X $(x, y \in X : xRy \Leftrightarrow x = y)$ *este o relaţie de echivalenţă.*

2. *Relaţia de asemănare a triunghiurilor din plan este o relaţie de echivalenţă.*

Remarca 3.4. *De multe ori relaţia de echivalenţă* R *se notează prin* $\sim$*. Astfel* xRy *se scrie sub forma* $x \sim y$.

Definiţia 3.22. *Fie $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe A şi $x \in A$. Mulţimea*

$$\hat{x} = \{y \in A : x \sim y\}$$

se numeşte clasa de echivalenţă a lui x.

Remarca 3.5. *Fie $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe A şi $x, y \in A$. Atunci $\hat{x} = \hat{y}$ sau $\hat{x} \cap \hat{y} = \varnothing$.*

Definiţia 3.23. *Fie $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe A. Mulţimea*

$$A/\sim = \{\hat{x} : x \in A\}$$

se numeşte mulţimea cît (sau factor) a lui A generată de $\sim$.

6. Familie de elemente, familie de mulţimi

Definiţia 3.24. *Vom numi familie de elemente din mulţimea X, indexată după mulţimea I, funcţia*

$$f : I \to X$$

Familia de elemente se notează $(x_i)_{i\in I}$, unde $x_i = f(i), i \in I$. In cazul, cînd elementele mulţimii X sunt mulţimi, termenul de ”familie de elemente” se substituie cu termenul ”familie de mulţimi”.

Exemplul 3.16. *Vom enumera cîteva exemple de familii de elemente.*

1. *Fie $I = \mathbb{N}$. Atunci familia de elemente din mulţimea X, indexată după mulţimea I (adică $f : \mathbb{N} \to X$), reprezintă şirul elementelor mulţimii X, $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, unde prin x_n s-a notat $f(n)$ $(n \in \mathbb{N})$.*

2. *Fie $I = \{1, 2, \ldots n\}$. Atunci familia de elemente din mulţimea X, indexată după mulţimea I, reprezintă cortejurile ordonate*

   $$(x_j)_{j=1}^{n} = (x_1, x_2, \ldots x_n),$$

   unde $x_j \in X, j = \overline{1, n}$.

Definiţia 3.25. *Se numeşte reuniune de familii de mulţimi $(X_i)_{i\in I}$ mulţimea*

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \{x : \exists i(i \in I \text{ si } x \in X_i)\}.$$

Definiţia 3.26. *Se numeşte intersecţie de familii de mulţimi $(X_i)_{i\in I}$ mulţimea*

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \{x : \forall i(i \in I \Rightarrow x \in X_i)\}.$$

Exemplul 3.17. *Vom studia următoarele exemple cu reuniune şi intersecţie de familii:*

1. $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}*} [1, 2 - \frac{1}{n}] = [1, 2)$.

2. $\bigcap\limits_{\alpha\in(0,1]} [1, 2 + \alpha) = [1, 2]$.

7. Mulțimi echivalente. Puterea mulțimii

Definiţia 3.27. *Mulţimile X şi Y se numesc echivalente (notaţie $X \sim Y$), dacă există o bijecţie $f : X \to Y$.*

Teorema 3.3. *(Cantor) Mulţimea X nu este echivalentă cu mulţimea tuturor submulţimilor sale.*

Teorema 3.4. *(Cantor-Bernstein) Dacă mulţimile X şi Y verifică condiţiile:*

1. *mulţimea X este echivalentă cu submulţimea Y_1 din Y;*
2. *mulţimea Y este echivalentă cu submulţimea X_1 din X;*

atunci mulţimile X şi Y sunt echivalente.

Definiţia 3.28. *Vom numi putere sau număr cardinal al mulţimii X (notaţie $Card\ X$) clasă de echivalenţă a mulţimii X relativ la relaţia de echivalenţă $\sim$. Aşadar,*

$$Card\ X = \{Y : Y \sim X\}$$

Remarca 3.6. *La figurat, puterea mulţimii X este ceea, ce este comun tuturor mulţimilor echivalente cu mulţimea X.*

Notaţii. Vom nota $Card\,\mathbb{N} = \aleph_0$ (alef zero), $Card\,\mathbb{R} = c$ (continuum).

8. Mulțimi numărabile

Definiţia 3.29. *Mulţimea X se numeşte numărabilă, dacă $Card\ X = \aleph_0$, adică dacă $\mathbb{N} \sim X$.*

Afirmaţia 3.1. *Mulţimea X este numărabilă, dacă şi numai dacă ea se reprezintă ca mulţimea valorilor unui şir, ce constă din termeni diferiţi:*

$$X = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}, unde\ \forall i \neq j : x_i \neq x_j. \tag{3.1}$$

Demonstraţie. Dacă X este numărabilă, atunci $\mathbb{N} \sim X$ şi, prin urmare, există o funcţie bijectivă $f : \mathbb{N} \to X$. Notînd $x_n = f(n)$, se obţine reprezentarea (3.1).

Dacă are loc relaţia (3.1), atunci funcţia $f : \mathbb{N} \to X$, $f(n) = x_n$, $x \in \mathbb{N}$ este o bijecţie, de unde rezultă, că mulţimea X este numărabilă. □

Afirmaţia 3.2. *Orice mulţime infinită conţine o submulţime numărabilă.*

Demonstraţie. Fie mulţimea X - infinită. Atunci există elementul $x_0 \in X$. Cum X este infinită, $X \setminus \{x_0\}$ la fel este o mulţime infinită, şi, prin urmare, există $x_1 \in X \setminus \{x_0\}$. Similar, există $x_2 \in X \setminus \{x_0, x_1\}$. Continuînd acest proces, se obţine şirul $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ cu proprietatea $x_{n+1} \in X \setminus \{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Aşadar, $\forall i \neq j : x_i \neq xj$, şi în baza afirmaţiei 3.1, conchidem, că mulţimea $\{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n\} \subset X$ este numărabilă. □

Afirmaţia 3.3. *Fie mulţimile X şi Y - numărabile. Atunci mulţimea $X \cup Y$ este numărabilă.*

Afirmaţia 3.4. *Dacă mulţimea X este numărabilă, iar mulţimea Y - infinită. Atunci $X \cup Y \sim Y$.*

Afirmaţia 3.5. *Fie mulţimile X şi Y numărabile. Atunci mulţimea $X \times Y$ se reprezintă ca reuniune numărabilă de mulţimi numărabile:*

$$X \times Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} X \times j$$

prin urmare, mulţimea $X \times Y$ este numărabilă.

Exemplul 3.18. *Vom studia următoarele exemple de mulţimi numărabile:*

1. *Mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ este numărabilă, deoarece ea se reprezintă ca reuniune a două mulţimi numărabile:*

$$\mathbb{Z} = \{-1, -2, -3, \ldots\} \cup \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

2. *Mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ este numărabilă, deoarece ea se reprezintă ca reuniune numărabilă de mulţimi numărabile:*

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

3. *Numărul $\alpha \in \mathbb{R}$ se numeşte algebric, dacă există un polinom*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x_n (a_n \neq 0; n \in \mathbb{N})$$

cu coeficienţi întregi, astfel încît $p(\alpha) = 0$.

Mulţimea A a tuturor numerelor algebrice este numărabilă.

Într-adevăr, fie

$$A_n = \left\{\alpha \in A : \exists a_j \in \mathbb{Z}, j = \overline{0, n}, a_n \neq 0, \sum_{j=0}^{n} a_j \alpha^j = 0\right\}.$$

Cum fiecărui polinom de gradul n,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x_n, a_j \in \mathbb{Z}, j = \overline{0, n}, a_n \neq 0,$$

îi corespunde în mod univoc cortejul $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, $a_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{0, n}$, $a_n \neq 0$, rezultă, că mulţimea polinoamelor de gradul n este echivalentă cu mulţimea

$$\underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \mathbb{Z}}_{n} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

şi, deci, este numărabilă. Aşadar, mulţimea polinoamelor de gradul n se scrie în formă de şir. Vom numerota mulţimea rădăcinilor reale ale primului polinom (o mulţime finită), după ce numerotăm mulţimea rădăcinilor polinomului al doilea (mulţime finită) şi aşa mai departe. Se obţine o reprezentare a mulţimii A_n în formă de şir, prin urmare, A_n este numărabilă. Atunci şi mulţimea numerelor algebrice $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ la fel este o mulţime numărabilă.

9. Mulțimi de puterea continuumului. Operații cu numere cardinale

Definiţia 3.30. *Mulţimea X se numeşte de puterea continuului, dacă*

$$Card\ X = c,$$

adică $X \sim \mathbb{R}$.

Exemplul 3.19. *Vom studia următoarele exemple:*

1. *Cum funcţia $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = tgx$ este bijectivă, rezultă*
$$Card\ \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = c.$$
2. *Cum funcţia $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = lnx$ este bijectivă, rezultă*
$$Card\ (0; +\infty) = c.$$
3. *Cum pentru orice $a, b \in R$, $a < b$, avem $(a, b) \sim \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, bijecţia între aceste mulţimi este realizată, de exemplu, de funcţia*
$$f : (a; b) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ f(x) = \frac{\pi}{b-a}(x-a) - \frac{\pi}{2}$$
rezultă, că $Card\ (a; b) = c$.
4. *Conform afirmaţiei 3.4,*
$$[0, 1] = (0, 1) \cup \{0, 1\} \sim (0, 1)$$
prin urmare, $Card\ [0; 1] = c$.

Definiţia 3.31. *Fie α, β - numere cardinale, X, Y - mulţimi, $Card\ X = \alpha$, $Card\ Y = \beta$. Se spune că numărul α este mai mic sau egal cu β (notaţie $\alpha \leq \beta$), dacă există o submulţime $Y_1 \subset Y$, astfel încît $Y1 \sim X$.*

Se spune că α este strict mai mic ca β (notaţie $\alpha < \beta$), dacă $\alpha \leq \beta$, $\alpha \neq \beta$.

Afirmaţia 3.6. *Fie X, Y - mulţimi. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1. *dacă există o funcţie injectivă $f : X \to Y$, atunci $Card\ X \leq Card\ Y$;*
2. *dacă există o funcţie surjectivă $f : X \to Y$, atunci $Card\ Y \leq Card\ X$.*

Afirmaţia 3.7. *Fie $Card\ X = c$, $Card\ Y = c$. Atunci $Card(X \times Y) = c$.*

Afirmaţia 3.8. *Fie $Card\ X = c$, $Card\ Y = c$. Atunci $Card(X \cup Y) = c$.*

Afirmaţia 3.9. *Următoarele afirmaţii sunt juste:*

1. *dacă $Card\ X = \alpha$, atunci $2^\alpha = Card\ \mathcal{P}(X)$;*
2. *$\alpha < 2^\alpha$, oricare ar fi numărul cardinal α;*
3. *$2^{\aleph_0} = c$;*
4. *$\aleph_0 < c$.*

Unitatea de conținut IV. SPAȚII TOPOLOGICE

1. Noțiune de spațiu topologic. Exemple

Definiţia 4.1. *Vom spune că familia $\mathcal{T}$ de submulţimi a mulţimii X formează o topologie pe mulţimea X, dacă:*

1. $\varnothing, X \in \mathcal{T}$;
2. *Dacă $U_1 \in \mathcal{T}$ şi $U_2 \in \mathcal{T}$, atunci $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$;*
3. *Dacă $A \subset \mathcal{T}$, atunci $\cup A \in \mathcal{T}$.*

Perechea $(X, \mathcal{T})$ se numeşte *spaţiu topologic*, elementele mulţimii X se numesc *punctele spaţiului topologic*; submulţimile din X ce aparţin familiei $\mathcal{T}$ se numesc deschise în spaţiul $(X, \mathcal{T})$.

Proprietăţile familiei mulţimilor deschise pot fi reformulate astfel:

- Mulţimea vidă şi însăşi spaţiul topologic sunt mulţimi deschise.
- Intersecţia a două mulţimi deschise este o mulţime deschisă.
- Reuniunea a unei familii arbitrare de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.

Din proprietatea 2 a topologiei imediat rezultă, că intersecţia a unei familii finite arbitrare de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.

Astfel, pentru a transforma o mulţime X într-un spaţiu topologic este suficient de indicat submulţimile din X, care vor fi considerate deschise.

Este evident, că pe una şi aceeaşi mulţime putem construi diferite topologii.

Exemplul 4.1. *Vom cerceta următoarele exemple de topologii:*

1. *Fie $X = \{x, y\}$, familia $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$ este o topologie pe X şi se numeşte topologie antidiscretă sau trivială. Perechea $(X, \mathcal{T})$ se numeşte spaţiu antidiscret.*
2. *Fie $X = \{x, y\}$, vom alcătui familia tuturor submulţimilor mulţimii X:*

   $$\mathcal{T} = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}.$$

   Familia $\mathcal{T}$ este o topologie pe X şi se numeşte topologie discretă. Perechea $(X, \mathcal{T})$ se numeşte spaţiu discret.

3. *Fie $X = \mathbb{R}$, familia $\mathcal{T} = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in\}$ de intervale disjuncte două cîte două este o topologie pe $\mathbb{R}$ şi se numeşte topologie naturală.*

   (În analiza matematică se demonstrează, că orice mulţime deschisă pe axa reală $\mathbb{R}$ este reuniunea a unui număr finit sau numărabil de intervale disjuncte două cîte două.)

Fie pe mulţimea arbitrară X sunt construite două topologii $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ şi, astfel sunt definite două spaţii topologice $(X, \mathcal{T}_1)$ şi $(X, \mathcal{T}_2)$.

Definiţia 4.2. *Vom spune, că topologia $\mathcal{T}_1$ este mai slabă decît topologia $\mathcal{T}_2$ (se notează $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_2$), dacă $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, adică din $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_1$ rezultă, că $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_2$. În acest caz topologia $\mathcal{T}_2$ este mai puternică (fină) decît topologia $\mathcal{T}_1$.*

Orice topologie $\mathcal{T}$ pe X este mai slabă decît topologia discretă şi mai puternică decît topologia antidiscretă ($\mathcal{T}_a \prec \mathcal{T} \prec \mathcal{T}_d$).

Însă există şi topologii, care nu pot fi comparabile.

2. Baza spaţiului topologic. Axiomele numărabilităţii

Definiţia 4.3. *Orice submulţime $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ al spaţiului topologic $(X, \mathcal{T})$ ce conţine punctul $x \in X$ se numeşte vecinătatea punctului x.*

Este evident, că mulţimea deschisă $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ este vecinătatea oricărui punct al său.

Definiţia 4.4. *Fie A o submulţime a a spaţiului topologic $(X, \mathcal{T})$. Orice submulţime $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ al spaţiului topologic $(X, \mathcal{T})$ ce conţine mulţimea A se numeşte vecinătatea mulţimii A.*

Definiţia 4.5. *Familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ se numeşte baza spaţiului topologic $(X, \mathcal{T})$, dacă orice submulţime deschisă nevidă a spaţiului X poate fi prezentată ca reuniunea unei subfamilii a familiei $\mathcal{B}$.*

E uşor de arătat, că familia $\mathcal{B}$ de submulţimi din X este baza spaţiului topologic $(X, \mathcal{T})$, dacă şi numai dacă pentru orice mulţime deschisă $\mathcal{U}$ şi orice punct $x \in \mathcal{U}$ există un element $V \in B$, astfel încît $x \in V \subseteq U$.

Este evident, că un spaţiu topologic posedă mai multe baze.

Orice bază satisface următoarele proprietăţi:

1. Pentru orice $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{B}$ şi orice punct $x \in \mathcal{U}_1 \bigcap \mathcal{U}_2$ există elementul $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ astfel, încît $x \in \mathcal{U} \subset \mathcal{U}_1 \bigcap \mathcal{U}_2$.

2. Pentru orice $x \in X$ există elementul $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ astfel, încît $x \in \mathcal{U}$.

Într-adevăr, prima proprietate rezultă din faptul, că $\mathcal{U}_1 \bigcap \mathcal{U}_2$ este o mulţime deschisă, iar a doua - consecinţa faptului, că X este o mulţime deschisă.

Mulţimea tuturor numerelor cardinale de forma $|\mathcal{B}|$, unde $\mathcal{B}$ este baza spaţiului topologic $(X, \mathcal{T})$, are elementul minimal (deoarece orice mulţime de numere cardinale este ordonată de relaţia $<$). Acest număr cardinal minimal se numeşte *ponderea spaţiului topologic* $(X, \mathcal{T})$ şi se notează $w((X, \mathcal{T}))$.

Orice bază generează în mod univoc topologia spaţiului.

Dacă în orice punct $x \in X$ există o bază numărabilă, atunci se spune că spaţiul topologic $(X, \mathcal{T})$ satisface *prima axiomă a numărabilităţii.*

Dacă spaţiul X are o bază numărabilă, atunci se spune că spaţiul topologic $(X, \mathcal{T})$ satisface *a doua axiomă a numărabilităţii.*

Baza spaţiului este şi baza în punct. Deci, axioma a doua a numărabilităţii este mai puternică decît prima axiomă a numărabilităţii.

3. Mulţime închisă. Închiderea unei mulţimi

Fie $(X, \mathcal{T})$ - un spaţiu topologic.

Definiţia 4.6. *Mulţimea $F \subset X$ se numeşte închisă în acest spaţiu, dacă complimentara acestei mulţimi $X \setminus F$ este mulţime deschisă.*

Mulţimile, care sunt concomitent şi deschise, şi închise se numesc *mulţimi deschise-închise.*

Definiţia 4.7. *Fie $A \subset X$. Cea mai mică mulţime închisă, ce conţine A, se numeşte închiderea mulţimii A.*

Închiderea unei mulţimi A se notează $cl_X A$.

Este evident, că mulţimea este închisă dacă şi numai dacă aceasta coincide cu închiderea sa: $A = cl_X A$.

Pentru orice două submulţimi A, B ale spaţiului X avem:

$$A \subset B \ \Rightarrow \ cl_X A \subset cl_X B. \tag{4.1}$$

Teorema 4.1. *Operatorul închiderii satisface următoarele proprietăţi:*

1. $cl_X \varnothing = \varnothing$;
2. $A \subset cl_X A$;
3. $cl_X (A \cup B) = cl_X A \cup cl_X B$;
4. $cl_X (cl_X A) = cl_X A$.

Demonstraţie.

1. Proprietatea rezultă din definiţia închiderii unei mulţimi.
2. Proprietatea rezultă din definiţia închiderii unei mulţimi.
3. Din 4.1 rezultă, că $cl_X A \subset cl_X (A \cup B)$ şi $cl_X B \subset cl_X (A \cup B)$. Deci,

$$cl_X A \cup cl_X B \subset cl_X (A \cup B) \tag{4.2}$$

Conform proprietăţii 2 a operatorului închiderii: $A \subset cl_X A$ şi $B \subset cl_X B$, prin urmare: $A \cup B \subset cl_X A \cup cl_X B$. Ultima mulţime este închisă ca reuniunea a două mulţimi închise. Conform definiţiei închiderii obţinem:

$$cl_X (A \cup B) \subset cl_X A \cup cl_X B \tag{4.3}$$

Formulele 4.2 şi 4.3 stabilesc egalitatea din proprietatea 3.

4. Proprietatea rezultă din faptul, că mulţimea $cl_X A$ este închisă.

□

4. Interiorul unei mulţimi

Fie $(X, \mathcal{T})$ - un spaţiu topologic.

Definiţia 4.8. *Fie $A \subset X$. Reuniunea tuturor mulţimilor deschise, ce se conţin în A (sau cea mai mare mulţime deschisă, ce se conţin în A), se numeşte interiorul mulţimii A.*

Interiorul unei mulţimi A se notează $IntA$.

Este evident, că mulţimea este deschisă dacă şi numai dacă aceasta coincide cu interiorul său: $A = IntA$.

Teorema 4.2. *Pentru fiecare mulţime $A \subset X$ are loc: $IntA = X \setminus cl_X(X \setminus A)$.*

Teorema 4.3. *Operatorul interiorului satisface următoarele proprietăţi:*

1. $IntX = X$;
2. $IntA \subset A$;
3. $Int(A \cap B) = IntA \cap IntB$;
4. $Int(IntA) = IntA$.

Demostraţia proprietăţilor operatorului interiorului este analogică demonstraţiei proprietăţilor operatorului închiderii şi se demonstrează aplicînd definiţia interiorului unei mulţimi, teoremele 4.1 şi 4.2.

5. Frontiera unei mulţimi

Fie $(X, \mathcal{T})$ - un spaţiu topologic.

Definiţia 4.9. *Fie $A \subset X$. Mulţimea*

$$FrA = cl_X A \cap cl_X(X \setminus A) = cl_X A \setminus IntA$$

se numeşte frontiera mulţimii A.

Teorema 4.4. *Operatorul frontierii satisface următoarele proprietăţi:*

1. $IntA = A \setminus FrA$;
2. $cl_X A = A \cup FrA$;
3. $Fr(A \bigcup B) \subset FrA \bigcup FrB$;
4. $Fr(A \bigcap B) \subset FrA \bigcup FrB$;

5. $Fr(X \setminus A) = FrA$;
6. $X = IntA \bigcup FrA \bigcup Int(X \setminus A)$;
7. $Fr(cl_X A) \subset FrA$;
8. $Fr(IntA) \subset FrA$;
9. A - *deschisă* $\Leftrightarrow FrA = cl_X A \setminus A$;
10. A - *închisă* $\Leftrightarrow FrA = A \setminus IntA$;
11. A - *deschisă-închisă* $\Leftrightarrow FrA = \varnothing$.

Demonstraţie. Proprietăţile 1-11 se demonstrează în baza unor calcule simple. Să demonstrăm proprietăţile 1 şi 3.

1. $A \setminus FrA = A \setminus [cl_X A \bigcap cl_X(X \setminus A)] = (A \setminus cl_X A) \bigcup (A \setminus cl_X(X \setminus A)) =$
$= A \setminus cl_X(X \setminus A) = A \bigcap IntA = IntA.$

3. $Fr(A \bigcup B) = cl_X(A \cup B) \bigcap cl_X(X \setminus (A \cup B)) =$
$= (cl_X A \cup cl_X B) \bigcap cl_X[(X \setminus A) \cap (X \setminus B)] \subset$
$\subset (cl_X A \cup cl_X B) \bigcap cl_X(X \setminus A) \bigcap cl_X(X \setminus B) \subset$
$\subset [cl_X A \cap cl_X(X \setminus A)] \bigcup [cl_X B \cap cl_X(X \setminus B)] = FrA \bigcup FrB.$

6. Axiomele de separare

Vom fixa spaţiul X.

Axioma T_{-1}. Orice spaţiu se consideră T_{-1}-*spaţiu*.

Axioma T_0. Spaţiul X se numeşte T_0-*spaţiu*, dacă pentru orice două puncte diferite $x, y \in X$ există o mulţime deschisă U, care conţine numai unul din punctele x, y.

Axioma T_1. Spaţiul X se numeşte T_1-*spaţiu*, dacă pentru orice două puncte diferite $x, y \in X$ există mulţimile deschise U, V astfel, încît $x \in U$, $y \in V$, $x \notin V$, $y \notin U$.

Axioma T_2. Spaţiul X se numeşte T_2-*spaţiu* sau *spaţiu Hausdorff*, dacă pentru orice două puncte diferite $x, y \in X$ există mulţimile deschise U, V astfel, încît $x \in U$, $y \in V$, $U \bigcap V = \varnothing$.

Axioma T_3. Spaţiul X se numeşte T_3-*spaţiu* sau *spaţiu regulat*, dacă X este T_0-spaţiu şi pentru orice mulţime închisă F şi orice punct $x \notin F$ există mulţimile deschise U, V astfel, încît $x \in U$, $F \subseteq V$ şi $U \bigcap V = \varnothing$.

Axioma $T_{3,5}$. Spaţiul X se numeşte $T_{3,5}$-*spaţiu* sau *spaţiu Tihonov* sau *spaţiu complet regulat*, dacă X este T_0-spaţiu şi pentru orice mulţime închisă F şi pentru orice punct $x_0 \notin F$ există o funcţie continuă $f : X \to \mathbb{R}$ astfel, încît $f(x_0) = 0$, $F \subseteq f^{-1}(1)$ şi $0 \leq f(x) \leq 1$ pentru orice $x \in X$.

Axioma T_4. Spaţiul X se numeşte T_4-*spaţiu* sau *spaţiu normal*, dacă X este T_1-spaţiu şi pentru orice două mulţimi închise F_0, F_1 cu intersecţia $F_0 \bigcap F_1 = \varnothing$ există o funcţie continuă $f : X \to \mathbb{R}$ astfel, încît $F_0 \subseteq f^{-1}(0)$, $F_1 \subseteq f^{-1}(1)$ şi $0 \leq f(x) \leq 1$ pentru orice $x \in X$.

Bibliografie

1. CALMUŢCHI L., CIOBANU M. Geometrie diferenţială. Probleme. Chişinău, 2002.
2. FINIKOV S.P. Curs de geometrie diferenţială. (Traducere din limba rusă), Editura Tehnică, Bucureşti, 1954.
3. GHEORGHIEV Gh., MIRON R., PAPUC D. Geometrie analitică şi diferenţială. Vol.I. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1968.
4. GHEORGHIEV Gh., MIRON R., PAPUC D. Geometrie analitică şi diferenţială. Vol.II. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1969.
5. MIRON R. Introducere în geometria diferenţială. Litografia Universităţii Iaşi, 1971.
6. MIRON R., BRÂNZEI D. Fundamentele aritmeticii şi geometriei. Editura Academiei Republice Socialiste România, Bucureşti, 1983.
7. PAPUC D. Geometrie diferenţială. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1982.
8. TEODORESCU I. D. Geometrie superioară. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1970.
9. VRÂNCEANU Gh. Geometrie analitică, proiectivă şi diferenţială. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1967.
10. КОВАНЦОВ Н.И., ЗРАЖЕВСКАЯ Г.М., КОЧАРОВСКИЙ В.Г., МИХАЙЛОВСКИЙ В.И. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сборник задач. Киев, Головное издательство Издательского объединения "Выща школа", 1982.
11. КРАСНОВ М.Л., КИСЕЛЁВ А.И., МАКАРЕНКО Г.И. Задачи и примеры с подробными решениями. М.: Едиториал УРСС, 2002.
12. ПОГОРЕЛОВ А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974.
13. ПОЗНЯК Э.Г., ШИКИН Е.В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. М.: Изд. МГУ, 1990.
14. НОРДЕН .П. Краткий курс дифференциальной геометрии, М.: Физматгиз, 1958.
15. ОЧАН Ю.С. Сборник задач по математическому анализу. Москва, Просвещение, 1981.

16. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии (под ред. Воднева В.Т.). Минск: Изд. "Вышейшая школа", 1970.

17. Сборник задач по дифференциальной геометрии (под ред. Феденко А.С.) М.: Наука, 1979.

18. Engelking R. General Topology. Warszawa: PWN, 1977.

19. Kelley J.L. General Topology. Moscow: Nauka, 1968.