CZU: 517(072.8)

ŞTIINŢE REALE, ECONOMICE ŞI ALE MEDIULUI

INFORMATICA ȘI DIDACTICA INFORMATICII

SPECIFICUL PREDĂRII ANALIZEI MATEMATICE VIITORILOR PROFESORI DE MATEMATICĂ

Natalia GAŞIŢOI, *dr., conf. univ., Facultatea de Ştiinţe Reale, Economice şi ale Mediului, Universitatea de Stat „Alecu Russo" din Bălţi*

Abstract: *In this paper we discuss some aspects of teaching Calculus at the University level to future teachers of Mathematics. During the last few years we remarked that first year students have difficulties in recognizing, interpretation and conceptual understanding of mathematical ideas. Since Calculus is a compulsory course taught in the first semester and provide powerful analytic tools for the further study of Mathematics, we consider that some topics studied at the lyceum level should be discussed once again and we give some recommendations on the way of introducing the basic concept of the limit of a function at a point.*

Keywords: *Didactics of Mathematics, teacher education, mathematics education, critical reflexion, Calculus.*

Pe parcursul ultimilor ani remarcăm cu îngrijorare nivelul scăzut de pregătire matematică a absolvenţilor liceelor. Majoritatea studenţilor din anul I înscrişi la specialitatea „Matematică", domeniul general de studiu *Ştiinţe ale educaţiei*, probabil cei care sînt pasionaţi de matematică şi doresc să-i instruiască pe alţii în acest domeniu, recunosc că nu pot formula definiţii şi teoreme, iar studiul matematicii în gimnaziu şi liceu era centrat pe însuşirea unor tehnici de calcul / rezolvare şi nu pe înţelegerea conceptelor, demonstraţia afirmaţiilor, stăpînirea raţionamentelor sau pe interpretarea rezultatelor matematice.

Nivelul slab de pregătire matematică a absolvenţilor liceelor este confirmat de raportul elaborat de Ministerul Educaţiei al Republicii Moldova şi Agenţia de Asigurare a Calităţii referitor la rezultatele examenelor şi evaluărilor naţionale din anul 2015. Conform acestui raport, în Clasamentul tipurilor de subiect în funcţie de media notelor de la examenul de bacalaureat *(Raport 2015:50)*, disciplina Matematică (profil real) este clasată pe ultimul loc cu o medie de 4,85, sub media pe Republică, care constituie 5,96.

Testul de examinare la matematică, administrat în sesiunea de bază a examenului de bacalaureat 2015, profil real, conţinea 4 itemi din domeniul analizei matematice. Itemii propuşi verificau competenţele elevului de a interpreta unele proprietăţi cantitative şi calitative ale funcţiei utilizînd derivata; de a opera cu numere complexe scrise în formă algebrică; de a utiliza metode legate de aplicaţiile derivatei ca metode calitativ noi de studiere a funcţiei; de recunoaştere a subgraficului unei funcţii în diverse contexte, de calcul al ariei subgraficului funcţiei aplicînd integrala definită. Majoritatea candidaţilor nu au reuşit să rezolve problemele propuse, ceea ce determină necesitatea repetării studierii elementelor de analiză matematică în primul an de facultate, în special în cadrul programelor de formare a viitorilor profesori de matematică. Considerăm oportună includerea în Curriculumul unităţii de curs *Analiză matematică* pentru viitorii profesori de matematică, studiul temelor conţinute şi în Curriculumul la matematică pentru clasele a X-a – a XII-a: funcţii; şiruri de numere reale; limite de funcţii; funcţii continue; funcţii derivabile; aplicaţii ale derivatelor; primitiva; integrala nedefinită; integrala definită şi aplicaţiile ei *(Curriculum 2010)*, doar că acest studiu trebuie să poarte un caracter de detaliere şi aprofundare sporită.

Analiza matematică este una dintre cele mai importante unităţi de curs în programul de formare a viitorilor profesori de matematică, o unitate de curs fundamentală şi obligatorie, în care limbajul şi simbolica matematică se afirmă începînd cu studiul primelor teme, fiind, de regulă, străine pentru studenţii anului I. În (Marcus 2010: 22) Solomon Marcus menţionează că „de la limbaj i se trage, în primul rînd, matematicianului singurătatea în care se află, deci merită să-i acordăm o atenţie specială". Studenţii anului I par a fi nişte intruşi, care nu întotdeauna reuşesc să înţeleagă acest limbaj, să citească corect formulele scrise şi anume în cadrul orelor de *Analiză matematică* o preocupare deosebită ar trebui să fie familiarizarea şi formarea deprinderilor studenţilor de a utiliza adecvat „această cucerire a spiritului uman care se numeşte limbajul matematic" (Marcus 2010: 26). Este imposibil să-i înveţi pe studenţi cum să predea matematica doar în cadrul unui curs de Didactică a matematicii. De aceea cadrele didactice universitare trebuie să contribuie esenţial la formarea competențelor de utilizare adecvată a limbajului matematic și de prezentare orală a rezultatelor matematice viitorilor profesori de matematică. Orele de curs de *Analiză matematică* trebuie să aibă forma unor prelegeri interactive, centrate pe student, care cu întrebările pe care le adresează sau cu răspunsurile pe care le dă, modifică mersul lecției. Cadrul didactic trebuie să-și provoace auditoriul cu o serie de întrebări, situații de problemă, să-i îndrume pe studenți să „descopere” rezultatele matematice, să creeze exemple și contraexemple proprii.

Analiza matematică studiază un șir de concepte interconexe, cu aplicații largi în diverse ramuri ale științei, ca de exemplu derivata funcției, integrala Riemann, seriile, toate fiind bazate pe un concept fundamental și anume cel de limită a unei funcții într-un punct. Derivata funcției, care exprimă viteza de variație a unei mărimi în raport cu o altă mărime, este limita raportului dintre creșterea funcției și creșterea argumentului cînd creșterea argumentului tinde la zero. Integrala Riemann, cu ajutorul căreia în anumite condiții pot fi calculate ariile figurilor plane, volumele corpurilor etc., reprezintă limita sumelor integrale Riemann cînd norma diviziunii tinde la zero. Suma unei serii de numere sau funcții este și ea o limită, anume limita șirului sumelor parțiale cînd rangul crește nelimitat, iar integralele improprii sunt și ele definite ca limite ale integralelor Riemann.

Prin urmare, pentru a evita înțelegerea superficială a conceptelor de bază ale Analizei matematice, trebuie să ne asigurăm că studenții înțeleg corect conceptul de limită a unei funcții într-un punct. În acest sens, putem aplica metoda utilizată frecvent în predarea matematicii și anume „regula celor patru”: ideile trebuie exprimate în mod grafic, numeric, verbal și simbolic.

Dacă vom intra în sala de curs și vom începe prelegerea cu definiția limitei funcției în sensul lui Cauchy: „Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru D. Vom spune că numărul real A este limita funcției f în punctul x_0, dacă pentru orice număr pozitiv $\varepsilon > 0$ există un număr pozitiv $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît din faptul că $x \in D \setminus \{x_0\}$ și satisface condiția $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ să rezulte $|f(x) - A| < \varepsilon$”, mizînd pe faptul că această definiție a fost deja studiată în liceu și e suficient doar să o actualizăm, riscăm să nu fim înțeleși de către majoritatea auditoriului. Neînțelegerea conceptului fundamental de limită a unei funcții într-un punct, la rîndul său, va conduce (în cel mai bun caz) la înțelegerea doar superficială a conceptelor de bază ale analizei matematice.

Cu riscul de a dedica acestui concept de o importanță majoră două-trei ore, propunem inițierea studiului de la „temelie”. S-ar putea propune pentru analiză o funcție, de exemplu $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$, care este definită pe toată mulțimea numerelor reale cu excepția punctului $x_0 = 2$. Cum în orice vecinătate a punctului $x_0 = 2$ se conțin o infinitate de puncte din domeniul de definiție al funcției, firește apare întrebarea referitoare la valorile pe care le ia funcția în punctele oricît de apropiate de $x_0 = 2$. Putem analiza această întrebare alcătuind un tabel de valori și utilizînd reprezentarea grafică (fiind ajutați de un calculator). Important e faptul că studentul trebuie să observe că valorile funcției f se apropie nelimitat de numărul $A = 5$ și să înțeleagă că limita funcției într-un punct x_0 „se interesează” de valorile funcției în punctele oricît de apropiate de x_0 și nu de valoarea funcției în acest punct, care în exemplul considerat nici nu există.

Procesul de investigare ar putea fi prelungit, analizînd funcția

$$g(x) = \begin{cases} f(x), \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \\ \quad 10, \text{ dacă } x = 2, \end{cases}$$

care este o prelungire a funcției f în punctul $x_0 = 2$ și deci în punctele oricît de apropiate de $x_0 = 2$ ia valori care se apropie nelimitat de numărul $A = 5$ și care diferă de valoarea funcției în punctul dat, întrucît avem $g(x_0) = 10$. Ulterior, poate fi analizat un exemplu de funcție ce nu are limită într-un punct, chiar dacă e definită în acel punct; un exemplu de funcție liniară, care în orice punct $x_0 \in \mathbb{R}$ are limită ce coincide cu valoarea funcției în punctul considerat și un exemplu de funcție infinit mare.

În baza exemplelor analizate, studenții ar trebui mai întîi să ajungă la o interpretare neformală a notației

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

De exemplu, „funcția f ia valori aproximativ egale cu A (sau oricît de apropiate de A) atunci cînd valorile argumentului x se apropie de x_0 (dar nu ne gîndim la însuși punctul x_0). Ulterior, această exprimare neștiințifică trebuie „tradusă” în limbajul vecinătăților, în limbajul termenilor $\varepsilon - \delta$ și cel al șirurilor numerice. Drept temă pentru acasă poate fi propusă demonstrația echivalenței acestor definiții, rezolvarea de probleme de demonstrație aplicînd definițiile formulate și numaidecît o listă de întrebări de control (de exemplu, care este semnificația termenilor ε și δ; este oare unic numărul δ determinat pentru o valoare fixată $\varepsilon > 0$; în ce puncte x_0 putem pune problema determinării limitei funcției, etc.?). Verificarea temei poate fi făcută la orele de seminar, iar studenții ar putea trece pe rolul de profesor, explicînd noțiunea de limită a funcției într-un punct, simulînd o etapă a lecției într-o clasă liceală de profil real, interpretînd exemple proprii și generalizînd conceptul pentru cazul limitelor infinite, limitelor la infinit și cel al limitelor laterale.

Ulterior, pe parcursul studiului conceptelor de bază ale *Analizei matematice* (derivata funcției, integrala Riemann, serie), ar trebui menținut acest stil de investigare, analizînd detaliat cele trei etape de geneză a unui concept nou: aproximare – rafinare – trecere la limită. Recomandăm elaborarea de către studenți a unor proiecte de cercetare referitoare la dezvoltarea unui concept de analiză matematică, de exemplu după modelul descris de Eli Passow în (Passow 1996: 10), cu reflectarea celor 5 etape: motivare – definiție – notații – tehnici de calcul – aplicații, apreciindu-se în special originalitatea exemplelor.

Planificarea orelor de curs și seminar trebuie îmbinată cu o coordonare bine chibzuită a temelor pentru acasă, întrucît anume lucrînd asupra acestor sarcini studentul poate însuși conștient conceptele studiate și dezvolta tehnicile de calcul. Lucrul independent, o componentă obligatorie a procesului de studiu, trebuie verificat regulat pentru a putea adapta procesul de instruire contribuind astfel la eficientizarea lui.

Specificul cursului de *Analiză matematică* constă și într-un număr impunător de teoreme, care trebuie studiate cu demonstrații. Pentru viitorii profesori de matematică este extrem de important de a dezvolta gîndirea matematică și competențele de argumentare a afirmațiilor formulate. Titularul cursului ar trebui să îi ajute pe studenți să „descopere” calea de demonstrație a teoremelor și să-i însoțească pe acest parcurs, în loc de a prezenta demonstrațiile într-un mod tradițional. Chiar dacă o astfel de abordare a predării solicită mai mult timp, optăm pentru ea, conștientizînd că aceasta ar însemna reducerea din cantitatea materiei de studiu, întrucît creșterea calității și înțelegerea în profunzime a problemelor discutate au un impact major asupra formării viitorului profesor de matematică.

Parcurgerea în cadrul prelegerilor interactive a căii: investigare – înaintare de ipoteze – formulare riguroasă – demonstrație – exemplificare, combinată cu rezolvarea argumentată de probleme în cadrul seminarelor poate contribui esențial la formarea viitorilor profesori de matematică de înaltă calificare.

Analiza matematică oferă unele dintre cele mai puternice instrumente analitice printre toate care au fost create. După cum susține Profesorul Steven Krantz *(Krantz 1999)*, este un privilegiu de a fi capabil să transmiți / dezvălui conceptele analizei matematice generațiilor următoare, cu care profesorul de matematică trebuie să se mîndrească.

Bibliografie:

1. Krantz, Steven, *How to teach Mathematics,* Providence, American Mathematical Society, 1999, 307 p.
2. Marcus, Solomon, *Singurătatea matematicianului.* Colecția Palimpsest, Editura LiterNet.ro, 2010. Disponibil: http://editura.liternet.ro/carte/268/Solomon-Marcus/Singuratatea-matematicianului.html
3. Ministerul Educației al Republicii Moldova. *Matematică. Curriculum pentru clasele a X-a – a XII-a,* Chișinău, Editura Știința, 2010, 52 p. Disponibil: http://www.edu.gov.md/sites/default/files/9148_md_matematica_romana.pdf
4. Passow, Eli, *Schaum's outline of theory and problems of understanding Calculus concepts,* New York, McGraw-Hill, 1996, 215 p.
5. Raport elaborat de Ministerul Educației al Republicii Moldova și Agenția de Asigurare a Calității: *Examene și Evaluări Naționale 2015*, Chișinău, 2015, 285 p. Disponibil: http://aee.edu.md/sites/default/files/raport_examene_2015.pdf