CZU 514.7

# VIZUALIZAREA ÎNFĂȘURĂTOAREI UNEI FAMILII DE SUPRAFEȚE CE DEPIND DE UN PARAMETRU

**Ina CIOBANU,** *dr., conf. univ., Facultatea de Ştiinţe Reale, Economice și ale Mediului, Universitatea de Stat „Alecu Russo" din Bălţi*

**Abstract:** *This article takes as its starting point the examination of the envelope of a family of surfaces which depend on a parameter. The result of our assessment helps us to visualize the envelope of the different kind of families of surfaces which depend on a parameter and understand more better notion of envelope. The process of visualization was possible using interactive soft GeoGebra.*

**Keywords:** *surface, family of surfaces, envelope, GeoGebra.*

Geometria diferențială este una din ramurile geometriei, studiată și în procesul pregătirii profesorilor de matematică în instituțiile superioare de învățământ din Republica Moldova.

Geometria diferențială studiază proprietățile curbelor și ale suprafețelor, familiilor de curbe și suprafețe prin metodele analizei matematice, în special prin calculul diferențial și integral.

Una din noțiunile fundamentale ale geometriei diferențiale clasice este noțiunea de înfășurătoare a unei familii de curbe sau a unei familii de suprafețe.

Totodată, odată cu dezvoltarea tehnologiilor informaționale și apariția softurilor matematice, s-a făcut posibilă înțelegerea mai bună a unor noțiuni geometrice la utilizarea inteligentă a proprietăților platformelor informaționale. Astfel, este binevenită majorarea volumului de informație, expunerea căreia poate fi făcută prin intermediul calculatorului la lecțiile de matematică.

Unul dintre cele mai efective softuri matematice, ce poate contribui atât la unificarea matematicii și informaticii, cât și la studierea matematicii clasice, este softul interactiv GeoGebra [6]. În favoarea acestei alegeri, putem aduce mai multe caracteristici ale acestei aplicații:

- geometria, algebra şi foaia de calcul sunt conectate dinamic;
- instrument pentru crearea materialelor didactice ca pagini web;
- accesibil în multe limbi pentru milioane de utilizatori din lumea întreagă;
- software „open source" (disponibil liber pentru utilizare necomercială);
- posibilitățile variate ale graficii 2D şi 3D;
- în perioada 2002-2017 aplicaţiei GeoGebra i-au fost acordate 16 premii.

Totodată, se observă că mai mulți studenți preferă să lucreze cu animație, elaborând construcții interactive. Prin aceste modele studenții înțeleg mai bine și noțiunea de înfășurătoare a unei familii de curbe sau a unei familii de suprafețe.

Fie $S\{\gamma_\alpha\}$ – o familie de curbe netede plane, ce depind de parametrul $\alpha$. [2]

**Definiție.** Curba netedă $\gamma$ se numește *înfășurătoarea* familiei $S$, dacă aceasta în orice punct al său este tangentă cel puțin cu o curbă a familiei $S$ și fiecare segment al curbei $\gamma$ este tangent cu un număr infinit de curbe a familiei $S$ (Figura 1).

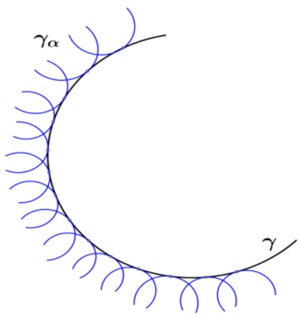


**Figura 1.** *Înfășurătoarea familie de curbe*

Următoarea teoremă, într-o măsură oarecare, rezolvă problema determinării înfășurătoarei.

**Teoremă.** Fie curbele $\gamma_\alpha$ ai familiei $S$ sunt definite pe domeniul $G$ de ecuațiile:

$$\varphi(x, y, \alpha) = 0, a \le \alpha \le b,$$

unde $\varphi$ este o funcție continuu diferențiabilă pe $G$ în raport cu fiecare argument al său și satisface condiția

$$(\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2 \neq 0.$$

Atunci înfășurătoarea $\gamma$ a familiei $S$ (dacă există) se definește de ecuațiile:

$$\begin{cases} \varphi(x, y, \alpha) = 0 \\ \varphi'_\alpha(x, y, \alpha) = 0 \end{cases}$$

în sensul, că pentru fiecare punct $(x, y)$ al înfășurătoarei putem indica acel $\alpha$, a.î. sistemul de valori $(x, y, \alpha)$ va satisface ambele ecuații ale sistemului dat. [3, 4]

Pentru o înțelegere mai bună a noțiunii de înfășurătoare a unei familii de curbe vom aduce mai multe exemple. [1]

**Exemplu 1.**

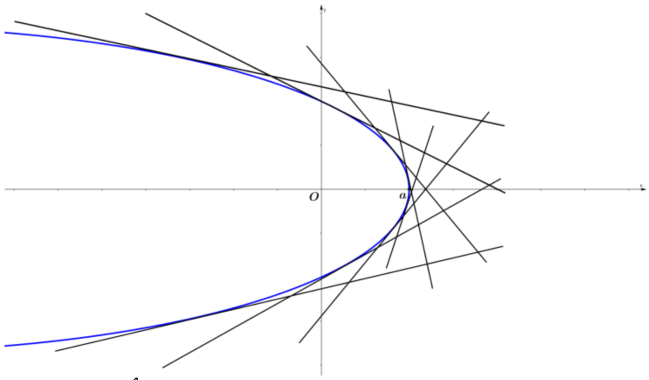


**Figura 2.** *Înfășurătoarea unei familii de drepte: o parabolă*

**Exemplu 2.**

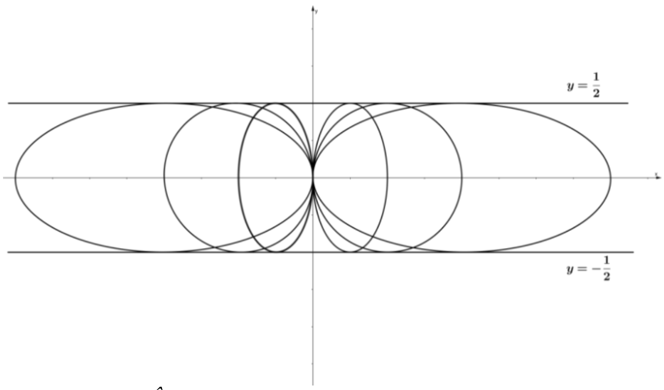


**Figura 3.** *Înfășurătoarea unei familii de elipse: 2 drepte*

**Exemplu 3.**

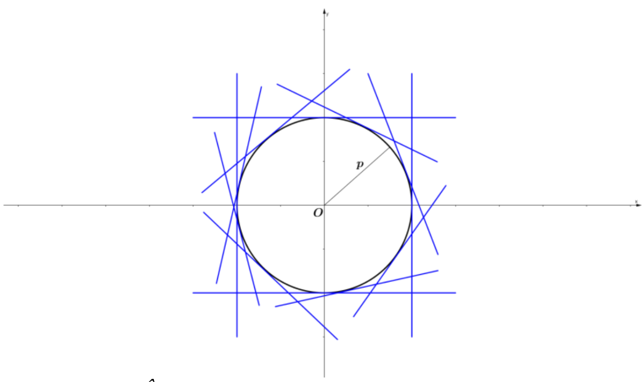


**Figura 4.** *Înfășurătoarea unei familii de drepte: un cerc*

**Exemplu 4.**

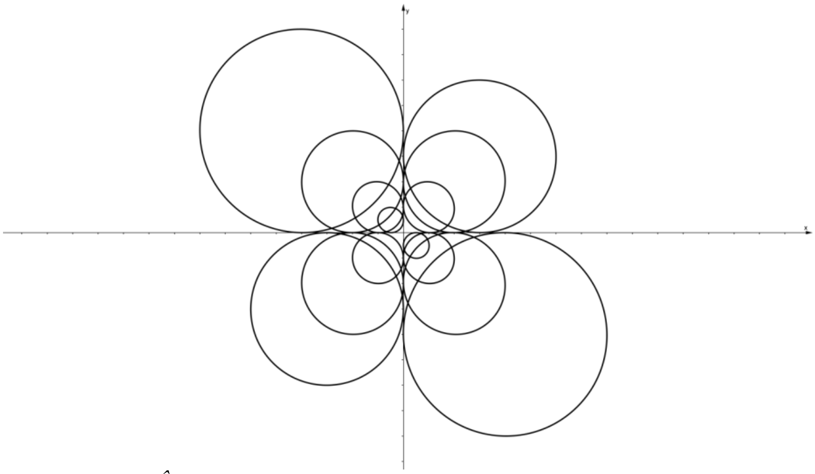

**Figura 5.** *Înfășurătoarea unei familii de cercuri: axele de coordonate*

**Exemplu 5.**

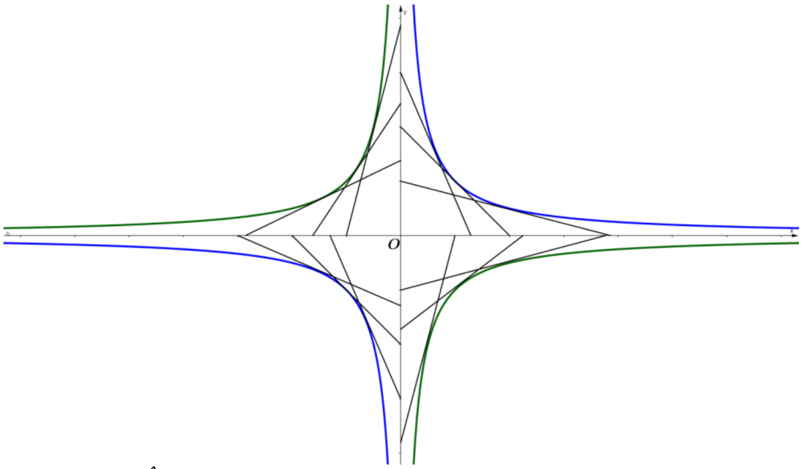


**Figura 6.** *Înfășurătoarea unei familii de drepte: 2 perechi de hiperbole*

**Exemplu 6.**

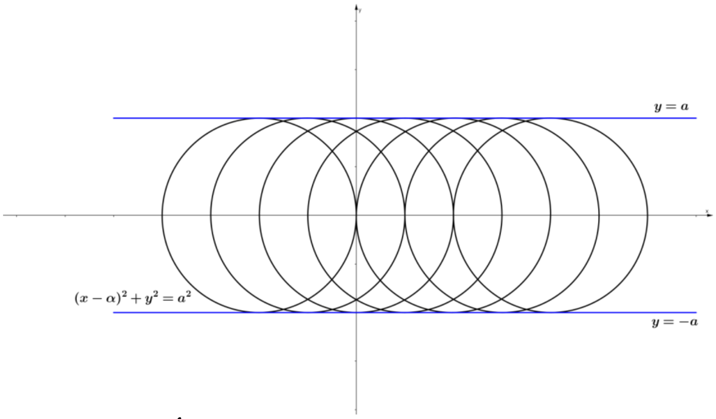


**Figura 7.** *Înfășurătoarea unei familii de cercuri: 2 drepte*

Definiția înfășurătoarei unei familii de suprafețe, ce depind de un parametru, nu se deosebește de definiția înfășurătoarei unei familii de curbe, ce depind de un parametru.

Fie $S\{\Phi_\alpha\}$ – o familie de suprafețe netede, ce depind de parametrul $\alpha$. [5]

**Definiție.** Suprafața netedă $\Phi$ se numește *înfășurătoarea* familiei $S$, dacă aceasta în orice punct al său este tangentă cel puțin cu o suprafață a familiei $S$ și fiecare porțiune a suprafeței $\Phi$ este tangentă cu un număr infinit de curbe a familiei $S$.

Următoarea teoremă, într-o măsură oarecare, rezolvă problema determinării înfășurătoarei.

**Teoremă.** Fie suprafețele $\Phi_\alpha$ ai familiei $S$ sunt definite pe domeniul $G$ de ecuațiile:

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, a \leq \alpha \leq b,$$

unde $F$ este o funcție continuu diferențiabilă pe $G$ în raport cu fiecare argument al său și satisface condiția

$$(F_x')^2 + (F_y')^2 + (F_z')^2 \neq 0.$$

Atunci înfășurătoarea $\Phi$ a familiei $S$ (dacă există) se definește de ecuațiile:

$$\begin{cases} F(x, y, z, \alpha) = 0 \\ F_\alpha'(x, y, z, \alpha) = 0 \end{cases}$$

în sensul, că pentru fiecare punct $(x, y, z)$ al înfășurătoarei putem indica acel $\alpha$, a.î. sistemul de valori $(x, y, z, \alpha)$ va satisface ambele ecuații ale sistemului dat. [5]

**Exemplu 1.** Familia de suprafețe $S\{\Phi_\alpha\}$ este definită de ecuațiile:

$$x^2 + y^2 + (z - \alpha)^2 = 4.$$

Familia $S$ reprezintă o familie de sfere cu centrul pe axa $Oz$ în punctul $(0, 0, \alpha)$ și raza $R = 2$.
Aplicând teorema formulată pentru determinarea înfășurătoarei unei familii de suprafețe, vom obține ecuația înfășurătoarei:

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Înfășurătoarea reprezintă un cilindru circular. [4]

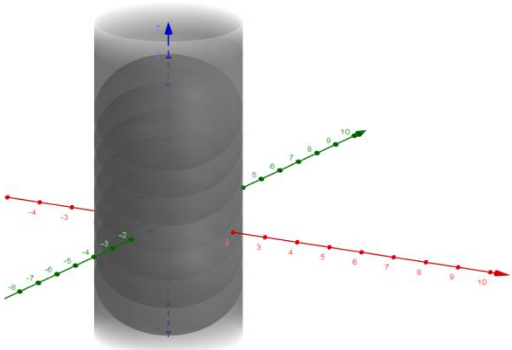

**Figura 8.** *Înfășurătoarea unei familii de sfere: cilindru circular*

**Exemplu 2.** Familia de suprafețe $S\{\Phi_\alpha\}$ este definită de ecuațiile:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 + (z - \alpha)^2 = \alpha^2.$$

Familia $S$ reprezintă o familie de sfere cu centrul în punctul $(\alpha, \alpha, \alpha)$ și raza $R = \alpha$.
Aplicând teorema formulată pentru determinarea înfășurătoarei unei familii de suprafețe, vom obține ecuația înfășurătoarei:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0.$$

Înfășurătoarea reprezintă un suprafață conică. [5]

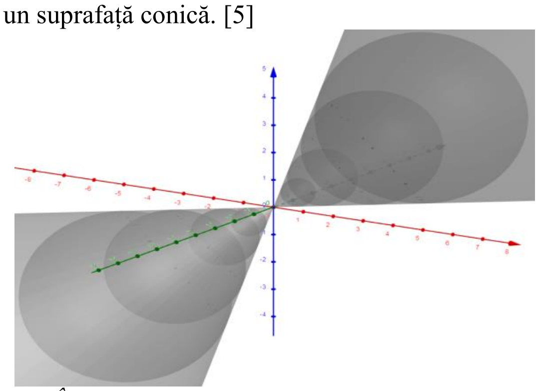

**Figura 8.** *Înfășurătoarea unei familii de sfere: suprafața conică*

**Concluzie**

Cu ajutorul softului interactiv GeoGebra putem vizualiza mai multe obiecte geometrice, eficientizând, astfel, procesul de înţelegere a noţiunilor fundamentale din geometria diferenţială clasică.

**Bibliografie:**


1. CALMUȚCHI, L., CIOBANU, M. *Geometrie diferențială. Probleme.* Chișinău, 2004. ISBN 9975-9815-0-X
2. FINIKOV, S. *Curs de geometrie diferențială.* (Traducere din limba rusă), București: Editura Tehnică, 1954.
3. GHEORGHIEV, Gh., MIRON, R., PAPUC, D. *Geometrie analitică și diferențială.* Vol. I, București: Editura didactică și pedagogică, 1968.
4. GHEORGHIEV, Gh., MIRON, R., PAPUC, D. *Geometrie analitică și diferențială.* Vol. II., Bucureşti: Editura didactică și pedagogică, 1969.
5. АЛЕКСАНДРОВ, А., НЕЦВЕТАЕВ, Н. *Геометрия.* Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2010. ISBN 978-5-9775-0419-5
6. Ce este GeoGebra? [online] [citat 20.09.2023]. Disponibil: https://www.geogebra.org/about