CZU 517.5

ВЫЧЕТЫ И РАСПОЛОЖЕНИЕ НУЛЕЙ МНОГОЧЛЕНА НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Елена ПРИСАКАРЬ, *студентка факультета реальных наук, экономики и окружающей среды, государственный университет имени Алеку Руссо*
Научный руководитель: **Наталья ГАЩИЦОЙ**, *др., конф.*

Rezumat: *Acest articol prezintă probleme care duc la găsirea locației zerourilor unui polinom pe plan complex. Sunt prezentate și conceptele de funcții holomorfe, puncte singulare izolate, clasificarea punctelor singulare izolate, conceptul de reziduu.*
Cuvinte-cheie: *reziduu, funcții holomorfe, puncte singulare izolate, plan complex.*

Введение: Решение многих прикладных задач связано с нахождением числа нулей функции, расположенных в определённой области. Например, при исследовании устойчивости (свойство решения дифференциального уравнения притягивать к себе другие решения при условии достаточной близости их начальных данных) решений дифференциальных уравнений интерес представляют нули характеристического многочлена, расположенные в левой полуплоскости. Если все корни уравнения лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (т.е. это отрицательные действительные числа или мнимые числа с отрицательной действительной частью), то положение равновесия системы асимптотически устойчиво. Если хотя бы один из этих корней лежит в правой полуплоскости, то оно неустойчиво.

$\mathbb{R}(\mathbb{C})$ −*дифференцируемость функций:* Дифференцируемость функции означает возможность выделения в ее приращении главной линейной части называемой дифференциалом функции. В комплексном анализе, в соответствии с двумя аспектами линейности существуют также два понятия дифференцируемости.

Определение $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ *−дифференцируемой функции:* [1, стр. 123] Фиксируем точку $z_0 \in \mathbb{C}$ и какую-то её окрестность U. Функция $f: U(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ называется $\mathbb{R}$ −дифференцируемой (соответственно $\mathbb{C}-$ дифференцируемой) в точке z_0, если для достаточно малых приращений аргумента, $|\Delta z| \to 0$, приращение функции в этой точке может быть записано в форме:

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z) = l(\Delta z) + o(\Delta z),$$

где l, для фиксированной точки z_0, является $\mathbb{R}$ −линейной функцией (соответственно $\mathbb{C}-$ линейной функцией), а $o(\Delta z)$ бесконечно малое высшего порядка относительно Δz, то есть $\frac{o(\Delta z)}{\Delta z} \to 0$, когда $|\Delta z| \to 0$.

Теорема: [1, стр.131] Функция f, определённая в окрестности точки z_0, является $\mathbb{C}-$ дифференцируемой в этой точке тогда и только тогда, когда она $\mathbb{R}$ −дифференцируема в точке z_0 и удовлетворяется условие Коши-Римана

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

Определение голоморфной функции: [1, стр.140] Функция $f: U(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ называется голоморфной в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, если она $\mathbb{C}-$ дифференцируема в окрестности каждой точки этой области.

Изолированные особые точки: Самым простейшим типом точек, в которых голоморфность функций нарушается являются изолированные особые точки.

Классификация изолированных особых точек: [1, стр.164] В зависимости от поведения функции f в окрестности изолированной особой точки выделяют три вида особых точек: устранимые особые точки, полюсы и существенно особые точки.

Пусть $a \in \mathbb{C}$ есть изолированная особая точка для функций $f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ (в этом случае $a \notin D$, но является предельной точкой для D и существует $r > 0$ такое что $\{0 < |z - a| < r\} \subset D$). Изолированная особая точка a функции f называется

I. устранимой точкой, если существует конечный предел
$$\lim_{z \longrightarrow a} f(z) = A;$$
II. полюсом, если существует предел
$$\lim_{z \longrightarrow a} f(z) = \infty;$$
III. существенно особой точкой, если f не имеет ни конечного, ни бесконечного предела
$$\nexists \lim_{z \longrightarrow a} f(z).$$

Пример 1: Найти изолированные особые точки заданной функции и установить их тип.

$$f(z) = \frac{\sin(z+5)}{(z-1)^3(z+5)}.$$

Голоморфное выражение данной функции $f(z) = \frac{\sin(z+5)}{(z-1)^3(z+5)} = \frac{g(z)}{h(z)}$ – частное двух голоморфных на всей комплексной плоскости функций. $g(z) = \sin(z+5)$, $h(z) = (z-1)^3(z+5)$. Следовательно, особыми точками этой функции могут быть только нули знаменателя. Находим нули знаменателя:

$$h(z) = 0 \Rightarrow (z-1)^3(z+5) = 0 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = -5.$$

В точке $z_1 = 1$:

$$\lim_{z\to 1} \frac{\sin(z+5)}{(z-1)^3(z+5)} = \infty,$$

следовательно, точка $z_1 = 1$ – является полюсом третьего порядка. В точке $z_2 = -5$:

$$\lim_{z\to -5} \frac{\sin(z+5)}{(z-1)^3(z+5)} = -\frac{1}{216},$$

следовательно, точка $z_2 = -5$ – является устранимой особой точкой.

Пример 2: Найти изолированные особые точки заданной функции и установить их тип.

$$f(z) = \cos\frac{1}{z-2i}.$$

Особой точкой функции является значение $z = 2i$. Найдем тип данной точки:

Так как $\nexists \lim\limits_{z\to 2i} \cos\frac{1}{z-2i} \Rightarrow$

Точка $z = 2i$ – является существенно особой точкой.

Определение и вычисление вычета в конечной изолированной особой точке: [1, стр. 132] Пусть $a \in \mathbb{C}$ – изолированная особая точка для функции f. Вычетом функции f относительно точки a называется комплексное число, равное значению интеграла $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_p} f(z)dz$, то есть коэффициент c_{-1} из разложения ряда Лорана функции f по степеням разности $z - a$.

Рассмотрим формулы вычисления вычетов относительно изолированных особых точек.

1. Если $a \in \mathbb{C} -$ устранимая особая точка, то вычет в ней равен нулю, т.е.

   $$\operatorname{Res} f(a) = c_{-1} = 0,$$

   поскольку разложение в ряд Лорана в окрестности устранимой точки не содержит отрицательных степеней.
2. Если $a \in \mathbb{C} -$ существенно особая точка, то

   $$\operatorname{Res} f(a) = c_{-1},$$

   т.е. вычет находится из разложения функции в ряд Лорана.

3. Если $a \in \mathbb{C} -$ полюс порядка n для функции f, то формула для вычисления вычета имеет вид:
$$\operatorname{Res} f(a) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \big((z-a)^n f(z)\big).$$
4. В частности, если $a \in \mathbb{C} -$ простой полюс для функции f, то формула для вычисления вычета имеет вид:
$$\operatorname{Res} f(a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

Пример 3: Найти вычеты функции $f(z) = \frac{\cos 2z}{(z-1)^3}$ относительно её конечных особых точек.

Решение: Особая точка $z = 1$ является полюсом третьего порядка, поэтому по формуле получаем:
$\operatorname{Res} f(1) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 1} \left(\frac{\cos 2z}{(z-1)^3}(z-1)^3\right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \to 1} (-2 \sin 2z)' = \frac{1}{2} \lim_{z \to 1} (-4 \cos 2z) =$ $-2 \cos 2$.

Принцип аргумента: [6, стр. 155] Пусть функция $f(z)$ регулярна в области G, за исключением, быть может, полюсов, и пусть $D -$ ограниченная односвязная область, лежащая в области G вместе со своей границей γ.

Если функция $f(z)$ не имеет на γ ни нулей, ни полюсов, то
$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$
где $N -$ число нулей, $P -$ число полюсов функции в области с учётом их кратностей, т.е. каждый нуль считается столько раз, какова его кратность, а каждый полюс – такое количество раз, каков его порядок.

Формулу можно записать иначе
$$N - P = \frac{1}{2\pi} \cdot \Delta_\gamma \arg f(z),$$
Здесь $\Delta_\gamma \arg f(z) -$ приращение аргумента функции $f(z)$ при обходе кривой γ в положительном направлении.

Теорема Руше: [6, стр. 156] При подсчёте числа нулей регулярной функции в заданной области часто применяется следующая теорема:

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в ограниченной односвязной области D и на её границе γ и пусть для всех $z \in \gamma$ имеет место неравенство
$$|f(z)| > |g(z)|.$$
Тогда функции $f(z)$ и $F(z) = f(z) + g(z)$ имеют в области D одинаковое число нулей.

Пример 4: Найти число корней уравнения $z^9 - 6z^4 + 3z - 1 = 0$ внутри круга $|z| < 1$. *Решение*: Обозначим $f(z) = -6z^4, g(z) = z^9 + 3z - 1$. Если $z \in \gamma$, где $\gamma: |z| = 1$, то
$$|f(z)| = 6, |g(z)| \le |z|^9 + 3|z| + 1 = 5,$$

откуда $|f(z)| > |g(z)|$ при $z \in \gamma$. По теореме Руше число корней исходного уравнения в круге $|z| < 1$ совпадает с числом корней уравнения $f(z) = -6z^4 = 0$ в этом круге, т.е. равно 4.

Пример 5: Найти число нулей многочлена $P(z) = z^3 - 2z - 5$ в области D:

a) $D: |z| < 1$;
b) $D: 1 < |z| < 3$

a) Решение: Обозначим $f(z) = -5, g(z) = z^3 - 2z$. На границе области, т.е. для точек, удовлетворяющих условию $|z| = 1$, имеем

$$|f(z)| = 5, |g(z)| = |z^3 - 2z| \leq |z|^3 + 2|z| = 3,$$

Условия теоремы Руше выполняются и, следовательно, число нулей данного многочлена в области $|z| < 1$ совпадает с числом нулей функции $f(z) = -5$ в этой области. Так как многочлен $f(z) = -5$ не имеет корней, то заключаем, что и многочлен $z^3 - 2z - 5$ в области $|z| < 1$ не имеет нулей.

b) Решение: В силу того, что в круге $|z| < 1$ многочлен не имеет нулей, то для нахождения нулей в кольце $D: 1 < |z| < 3$ достаточно найти их число в кргуе $|z| < 3$.

Обозначим $f(z) = z^3, g(z) = -5 - 2z$. На границе области, т.е. для точек, удовлетворяющих условию $|z| = 3$, имеем

$$|f(z)| = |z|^3 = 27, |g(z)| = |-5 - 2z| \leq 5 + 2|z| = 11,$$

Условия теоремы Руше выполняются, и искомое число нулей совпадает с числом нулей многочлена $f(z) = z^3$. Так как этот многочлен в области $|z| < 3$ имеет корень $z = 0$ кратности $n = 3$, то получаем, что многочлен $z^3 - 2z - 5$ в кольце $D: 1 < |z| < 3$ имеет три нуля.

Выводы: В данной работе проведено исследование теории вычетов и ее применения к нахождению расположения нулей многочлена на комплексной плоскости. На основании изученного материала и примененных навыков можно сделать вывод, что теория вычетов позволяет оптимизировать и нахождение расположения нулей многочлена на комплексной плоскости. Данная работа позволила структурировать информацию, изученную ранее, в полной мере изучить понятия голоморфных функций, особых точек и самого понятия вычета.

Библиография:

1. GAȘIȚOI, N., *Analiză complexă*, PIM, Iași, 2014, 192 с., ISBN 978-606-13-2095-0
2. БАЛК, М., ПЕТРОВ, В., ПОЛУХИН, А., *Задачник-практикум по теории аналитических функций*, изд. Просвещение, 1976, с. 84.
3. БЕРМАН, Г.Н., *Сборник задач по курсу математического анализа*, изд. Наука, Москва, 1985, с. 236-242.
4. ВОЛКОВЫСКИЙ, Л. И., ЛУНЦ, Г.Л., АРАМАНОВИЧ, И.Г., *Сборник задач по теории функций комплексного переменного*, изд. Физматлит, Москва, 2002 – с. 55, ISBN 5-9221-0264-8

5. ПОТАПОВ, А. П., *Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной в 2-х ч*. Часть 1: Учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Потапов. – М.: Изд-во Юрайт, 2017. ISBN 978-5-534-04680-9
6. ПЧЕЛИН, Б.К., *Специальные разделы высшей математики*. М.: Высшая школа, 1972. 462 с.