CZU 517.22

ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ. ЗАДАЧИ НА ОТЫСКАНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Елена ПРИСАКАРЬ, *студентка факультета реальных наук, экономики и окружающей среды, государственный университет имени Алеку Руссо*
Научный руководитель: **Наталья ГАЩИЦОЙ**, *др., конф.*

Rezumat: *Acest articol prezintă probleme care duc la conceptul de derivată, oferă o definiție a unei derivate, semnificația ei geometrică și fizică și prezintă probleme pentru diverse aplicații ale primei derivate. Derivata este un indicator al schimbării oricărei funcții în orice moment și în orice moment. Unele dintre aplicațiile sale vor fi prezentate în acest articol.*

Cuvinte-cheie: *derivată, funcție, extremum, schimbare.*

Введение: Дифференциальное исчисление – мощный математический инструмент для анализа изменений в объектах. Для использования этого инструмента были сформулированы простые правила вычисления производных. Производная – одно из фундаментальных понятий математики, это функция, являющаяся результатом применения той или иной операции дифференцирования к исходной функции. Именно эта функция позволяет человеку решать задачи разного характера. Причем речь идет о задачах как в математике, так и на практике, то есть в сферах техники и науки. Производная – это показатель изменения любой функции в любой момент и в любой точке. Она может отображать степень изменения всего. Например, изменение в популяции дельфинов в зависимости от изменения температуры воды, изменение массы шариков в зависимости от его площади, или даже поможет спрогнозировать скорость роста очередного финансового актива. Таким образом, производная функции и её приложения широко применяются в задачах математического моделирования, при решении различных задач физики, химии, геометрии и в других отраслях знаний. Также производную используют для исследования функции и построения её графика, для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции. В данной статье рассмотрены задачи, приводящие к понятию производной, дано определение производной, её геометрического и физического смысла и рассмотрены задачи на различные применения первой производной.

Задачи, приводящие к понятию производной: Задача 1 (о скорости движения): Материальная точка движется по прямой, на которой заданы начало отсчёта, единица измерения (метр) и направление. Закон движения задан формулой $s = s(t)$, где t – время (в секундах), $s(t)$ – расстояние материальной точки от начала отсчёта (её координата) в момент времени

t (в метрах). Найти скорость движения материальной точки в момент времени t (в м/с).

Решение: Пусть в момент времени t материальная точка была в положении T.

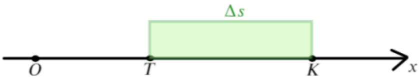

Рис. 1: *Задача 1*

В момент времени $t + \Delta t$ материальная точка будет в точке K, то есть $OK = s(t + \Delta t)$. Значит, за Δt секунд материальная точка переместилась из T в точку K. Имеем: $TK = OK - OT = s(t + \Delta t) - s(t)$. Полученная разность называется приращением функции: $s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$. Итак, $TK = \Delta s$ (м). Средняя скорость $v_{\text{ср}}$ движения материальной точки за промежуток времени $[t; t + \Delta t]$ равна $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (м/с).

А скорость $v(t)$ в момент времени t (мгновенная скорость) – это тоже скорость движения за промежуток времени $[t; t + \Delta t]$, но Δt выбирается очень маленьким, почти равным нулю, то есть $\Delta t \to 0$. Это значит, что $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}$. Итак,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Задача 2 (о касательной к графику функции): На графике функции $y = f(x)$ взяли точку $M\big(a, f(a)\big)$ и в этой точке провели касательную к графику функции. Необходимо определить угловой коэффициент этой касательной.

Решение: Дадим аргументу приращение Δx и рассмотрим на графике точку P с абсциссой $a + \Delta x$. Ордината точки P равна $f(a + \Delta x)$. Угловой коэффициент секущей MP равен тангенсу угла между секущей и осью x:

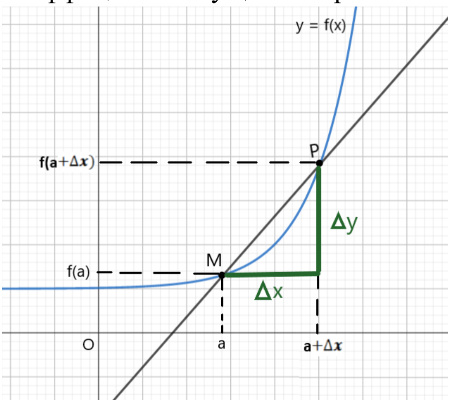

Рис. 2: *Задача 2*

$k_{\text{сек}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

При Δx, стремящемся к нулю, точка P будет приближаться по графику к точке M. При этом касательная будет предельным положением секущей. Значит, угловой коэффициент касательной равен $k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}}$. Используя приведённую выше формулу для $k_{\text{сек}}$, получаем:

$$k_{\text{кас}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Определение производной функции: [1, стр. 56] Пусть $y = f(x) -$ функция, которая определена и непрерывна на некотором интервале, а $x -$ произвольная точка, принадлежащая данному интервалу. Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение стремится к нулю и этот предел существует называется *производной этой функции.*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ где } f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y$$

Итак, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Физический (механический) смысл производной: если $s(t)$ – закон прямолинейного движения тела, то производная показывает мгновенную скорость в момент времени t: $= v = s'(t)$.

Геометрический смысл производной: если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, не параллельную оси y, $f'(a) -$ угловой коэффициент касательной: $k = f'(a)$.

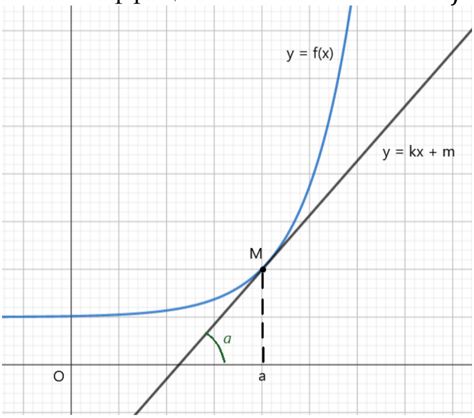

Рис. 3: *Геометрический смысл производной*

Поскольку $k = tg\ \alpha$, то верно равенство $f'(a) = tg\ \alpha$.

Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений функций:

Задача 1: [2, стр. 78] Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

Решение: Пусть первое число x, тогда второе число $8 - x$, где $0 \leq x \leq 8$.

Тогда функция будет иметь вид:

$$f(x) = x^3 + (8 - x)^3.$$

Наименьшее значение функция принимает в точке её минимума.

Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = 3x^2 - 3(8 - x)^2 = 3(x^2 - (8 - x)^2).$$

Приравняем производную к нулю и исследуем поведение функции:

$f'(x) = 3(x^2 - (8 - x)^2) = 0.$

$x^2 - (8-x)^2 = 0$
$(x - 8 + x)(x + 8 - x) = 0$
$8(2x - 8) = 0 \Rightarrow x = 4.$

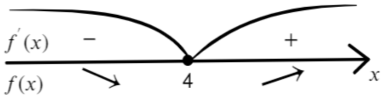

Рис. 4

Из рис. 4 видно, что $x = 4 -$ является минимумом функции, тогда $4 -$ первое число, $8 - 4 = 4 -$ второе число.

Задача 2: [2, стр. 79] Из углов квадратного листа картона размером $18 \times 18\ \text{см}^2$ нужно вырезать одинаковые квадраты так, чтобы, согнув лист по пунктирным линиям (рис. 5), получить коробку наибольшей вместимости. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата?

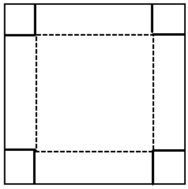

Рис. 5

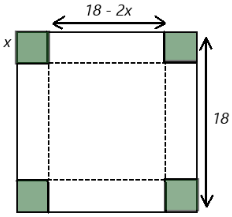

Рис. 6

Решение:

Пусть $x -$ длина стороны вырезаемого квадрата, тогда $18 - 2x -$ длина стороны пунктирного квадрата. Так как длина не может быть отрицательной, ставим условие, что:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 18 - 2x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 9.$$

$V(x) = S(x) \cdot x = (18 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 72x^2 + 324x.$

Наибольшее значение функция принимает в точке её максимума.

Найдем производную: $V'(x) = 12x^2 - 144x + 324.$

Приравняем производную к нулю и исследуем поведение функции:

$x^2 - 12x + 27 = 0 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 9 - \emptyset \end{array}\right.$$

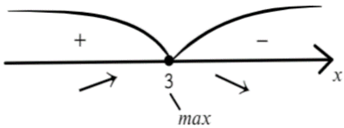

Рис. 7

Ответ: 3

Задача 3: [2, стр. 81]. На странице книги печатный текст должен занимать S квадратных сантиметров. Верхнее и нижнее поля должны быть по a см, правое и левое – по b см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то какими должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

Решение: Пусть x – ширина страницы, $y -$ высоты страницы, тогда $S = (x - 2b)(y - 2a)$, где $x > 2b, y > 2a$. Тогда $y = 2a + \frac{S}{x-2b}$.

$f = xy -$ площадь страницы. Тогда функция будет иметь следующий вид:

$$f(x) = 2ax + \frac{Sx}{x - 2b}.$$

Найдем минимум функции $f(x) = 2ax + \frac{Sx}{x-2b}$.

Возьмем производную $f'(x) = 2a - \frac{2bS}{(x-2b)^2}$

Приравняем производную к нулю и исследуем поведение функции:
Откуда находим, что

$x_1 = 2b + \sqrt{\frac{Sb}{a}}$, $x_2 = 2b - \sqrt{\frac{Sb}{a}}$.

Значение $x_2 < 2b \Rightarrow$ не принадлежит нашему интервалу $\Rightarrow$

$$x = 2b + \sqrt{\frac{Sb}{a}}, \text{который является минимумом данной функции. Тогда:}$$

$x = 2b + \sqrt{\frac{Sb}{a}}, y = 2a + \sqrt{\frac{Sa}{b}}$.

Задача 4: Определить, какое из значений больше 100^{101}и 101^{100}.

Решение: Рассмотрим функции $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Вычислим её производную:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Приравняем производную к нулю и исследуем поведение функции:

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow x = e, x \neq 0.$$

Как видно, при условии $x > e$ производная будет отрицательной. Тогда при $x > e$ функция $f(x)$ является убывающей и, следовательно, выполняется соотношение $\frac{\ln 100}{100} > \frac{\ln 101}{101}$.

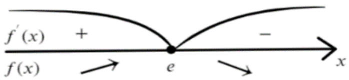

Рис. 8

Отсюда получаем, что $101 \ln 100 > 100 \ln 101 \Rightarrow 100^{101} > 101^{100}$.

Ответ: $100^{101} > 101^{100}$.

Задача 5: Решить неравенство $2x^9 - x^5 + x > 2$.

Решение: Найдем участки возрастания и убывания функции

$$f(x) = 2x^9 - x^5 + x - 2.$$
$$f'(x) = 18x^8 - 5x^4 + 1.$$

Пусть $x^4 = t$. Тогда $18t^2 - 5t + 1 = 0$.

Так как дискриминант квадратного трехчлена $18t^2 - 5t + 1$ является отрицательным числом и коэффициент при t^2 этого квадратного трёхчлена больше нуля, то для каждого действительного x имеем неравенство $f'(x) > 0$.

Таким образом, функция $f(x) = 2x^9 - x^5 + x - 2$ является непрерывной и возрастающей на всей числовой прямой; поэтому её график может пересекать ось OX только в одной точке. Учитывая, что $f(1) = 0$, заключаем, что решениями данного неравенства являются все значения x из промежутка $(1; +\infty)$.

Ответ: $x \in (1;\ +\infty)$.

Выводы: На основании изложенного материала можно сделать вывод о том, что производная – одно из фундаментальных понятий математики и ее применение довольно широко. Данное понятие помогает наиболее эффективно решить некоторые школьные задачи повышенной сложности. Представленная работа даёт понять, что существует ряд подходов ко многим преобразованиям в математике, которые стандартным путём трудноосуществимы или осуществимы, но громоздкими способами. В связи с научно-техническим прогрессом дифференциальное исчисление становится все более актуальным в решении как простых, так и сложных задач. Можно сказать, что задачи на исследование поведения функции имеют большое практическое применение. В данной работе показано решение некоторых таких задач.

Библиография:

1. КОЛМОГОРОВ, А.Н., *Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 кл. сред. шк*. / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын [и др.]; под ред. А.Н. Колмогорова. 2-е изд. М.: Просвещение, 2013. 384 с. 62 ISBN 978-5-09-019513-3
2. БЕРМАН, Г. Н., Сборник задач по курсу математического анализа для втузов. с. 93-97 ISBN 978-5-507-46033-5
3. ЕПИФАНОВА, Т.Н., Отыскание экстремальных значений функции различными способами // *Математика в школе*. 2004. №4. С. 52-54. ISBN 5-200962-89-X
4. ЗАВИЧ, Л.И., ЧИНКИНА, М.В., Классы с углубленным изучением материала // *Математика в школе*. 2004. №6. С. 17-23. ISBN 5-200962-89-X
5. ЛЕБЕДИНЦЕВ, К. Ф., Основные положения методики учения о функциях и элементах анализа в школах II ступени // *Математика в школе*. 1983. №4. С. 60-67.