CZU 517.5:33

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В ЭКОНОМИКЕ

Наталья ЖМУРЧУК, *студентка факультета реальных наук, экономики и окружающей среды, государственный университет имени Алеку Руссо*

Научный руководитель: **Татьяна РОТАРЬ**, *ассист.*

Rezumat: *În Articol se descrie utilizarea calculului diferențial în modelele economice pentru funcția de o variabilă. Utilizarea derivatelor este, de asemenea, o direcție importantă în îmbunătățirea analizei economice. Valorile extreme nu caracterizează starea ca valoare totală sau medie, ci un proces, o schimbare a unui obiect economic.*

Cuvinte-cheie: *derivata funcției de o variabilă, cerere, profit, elasticitate.*

Математика является не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования. Она служит средством предельно четкой и ясной формулировки экономических понятий и проблем. Современный человек должен обладать определенными экономическими знаниями, а современный экономист должен обладать способностью проведения анализа с использованием количественного метода. Именно математика является и орудием количественного расчета, и методом точного исследования. Ф. Энгельс в своё время заметил, что «*лишь дифференциальное исчисление даёт естествознанию возможность изображать математически не только состояния, но и процессы: движение*» [3]. Поэтому целью данной работы является выяснить, каков экономический смысл производной, какие новые возможности для экономических исследований открывает дифференциальное исчисление, а также исследовать применение производной при решении различных видов экономических задач.

Современная жизнь такова, что экономика стала неотъемлемой ее частью. Ведь без экономики практически невозможно сейчас заниматься домашним хозяйством, распределять и планировать семейный бюджет, правильно тратить ресурсы и средства. Именно в этом нам могут помочь экономические задачи. Основная проблема, которую я пытаюсь рассмотреть в работе: как можно использовать производную в экономических целях и ее роль в современных экономических взаимоотношениях.

Для решения некоторых математических задач, задач из физики, задач из экономической области (задачи о стоимости и прибыли), а также задач с применением приближенных методов вычислений и многих других задач, которые приводят к нахождению разности значений функций в двух точках, применяется одно из фундаментальных понятий математического анализа – понятие производная функции. Две классические задачи, одна – из геометрии (задача о касательной к кривой на плоскости) и другая – из физики (задача о мгновенной скорости материальной точки) привели к понятию производная функции. Эти задачи были предложены и решены Г. В. Лейбницем и И. Ньютоном соответственно [1].

На вопрос «что такое производная?» экономист ответит: «Маржинализм». «Marginal» в переводе с английского означает «предельный». Предельными величинами в экономике являются: предельный доход, предельные издержки, предельная полезность, предельная производительность труда. Они характеризуют не состояние, а процесс, т.е. изменение экономического объекта. Поэтому производная показывает скорость изменения некоторого экономического объекта или процесса с течением времени или по отношению к другому исследуемому фактору [1].

Пусть Q – выпуск произведенной продукции, $TC(Q)$ – соответствующие данному выпуску издержки производства (total costs), ΔQ – прирост продукции, а DTC – прирост издержек производства. Предельные издержки MC (marginal costs) показывают дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции:

$$MC = TC\,(Q + \Delta Q) - TC(Q), \text{где } \Delta Q = 1.$$

Так как $\Delta TC \approx dTC$, то получим $MC = \Delta TC \approx dTC = TC'(q)\Delta q = TC'(q)$. Подпредельным (маржинальным) значением показателя в экономическом анализе понимают производную функции этого показателя [2].

Для исследования процессов в экономике применяют понятие эластичности функции (E_{xy}), которое показывает предел отношения относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x, при $\Delta x \to 0$

$$E_{yx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\cdot y'.$$

Эластичность функции – это изменение одного показателя x по отношению к изменению другого показателя y, от которого зависит первый.

Она показывает процентное изменение одной переменной в результате изменения другой на 1%.

Существует несколько видов эластичности:

1. Эластичность спроса по цене (прямая):

$$E_P^D = \frac{\partial Q}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{Q'(P) \cdot \Delta P}{P' \cdot \Delta P} \cdot \frac{P}{Q} = Q'(P) \cdot \frac{P}{Q}$$

она показывает процентное изменение величины спроса на какое-либо благо при изменении его цены на 1% и характеризует реакцию потребителей на изменение цен на продукцию.

Если $E_P^D > 1$, то спрос является эластичным (или относительно эластичным). Объём спроса изменяется на больший процент, чем цена.

Если $E_P^D < 1$, то спрос называется неэластичным. Объем спроса меняется на меньший процент, чем цена.

Если $E_P^D = 1$, то говорят, что товар имеет единичную эластичность и изменение цены вызывает абсолютно пропорциональное изменение объема спроса.

Если $E_P^D = 0$, то спрос на данный товар называется абсолютно неэластичным. Объем спроса не меняется при изменении цены и остается постоянным при любом её изменении.

Если $E_P^D = \infty$, то спрос называется абсолютно эластичным. Объем спроса неограничен при падении цены ниже определенного уровня.

2. Эластичность спроса по доходу:

$$E_I^D = \frac{\partial Q}{\partial I} \cdot \frac{I}{Q} = \frac{Q'(I) \cdot \Delta I}{I' \cdot \Delta I} \cdot \frac{I}{Q} = Q'(I) \cdot \frac{I}{Q},$$

характеризует относительное процентное изменение величины спроса на какое-либо благо при изменении дохода потребителя на 1%. Положительная эластичность определяет качественные товары, а отрицательная – некачественные.

3. Ценовая эластичность ресурсов:

$$E_p = \frac{\partial R}{\partial P} \cdot \frac{P}{R} = \frac{R'(P) \cdot \Delta P}{P' \cdot \Delta P} \cdot \frac{P}{R} = R'(P) \cdot \frac{P}{R}.$$

показывает относительное изменение величины спроса на какой-либо ресурс, например, труд, при изменении его цены на 1%.

Производную используют при решении экономических задач.

Задача 1. Функция спроса имеет вид $QD = 100 - 20p$, постоянные издержки TFC (total fixed costs) составляют 50 денежных единиц, а переменные издержки TVC (total variable costs) на производство единицы продукции – 2 денежные единицы. Найти объём выпуска, максимизирующий прибыль монополиста [3].

Прибыль есть выручка минус издержки:

$$P = TR - TC,$$
где $TR = pQ$; $TC = TFC + TVC$.
Найдём цену единицы продукции:
$$20p = 100 - Q \Leftrightarrow p = 5 - \frac{Q}{20}.$$
Тогда
$$P = \left(5 - \frac{Q}{20}\right)Q - (50 + 2Q) = -Q^2 + 60Q - 1000.$$
Найдём производную:
$$P'(Q) = -2Q + 60.$$
Приравняв производную к нулю, находим критическую точку $Q = 30$. При переходе через точку $Q=30$ функция $P(Q)$ меняет свой знак с плюса на минус, следовательно, эта точка является точкой максимума, и в ней функция прибыли достигает своего максимального значения. Таким образом, объём выпуска, максимизирующий прибыль, равен 30 единицам продукции.

Ответ.

Задача 2. Объём спроса на продукцию предприятия выражается формулой:
$$QD = 200 - 4p,$$
а объём предложения
$$- QS = 6p - 100.$$
Величина переменных издержек на единицу продукции $TVC=25$. Чему должна быть равна цена на единицу продукции p, чтобы прибыль P была максимальной? [3]

Решение. В точке потребительского равновесия $Q_S=Q_D$, то есть
$$6p_0 - 100 = 200 - 4p_0,$$
откуда $p_0 = 30$ *(ден.ед.)* – равновесная цена. Тогда $Q_0 = 80$ (ед.) – равновесный объём продукции. Изобразим графически кривые спроса и предложения, а также точку потребительского равновесия, находящуюся на их пересечении. Рассмотрим три возможных варианта:

1) $p > p_0$, тогда $Q = Q_D$, то есть
$$P = QDp - QD\,TVC = QD(p - TVC),$$
подставим значения и получим:
$$P = (200 - 4p) \cdot (p - 25) = -4p^2 + 300p - 5000.$$
2) $p = p_0 \Longrightarrow Q = QD = QS,\ Q_0 = 80$ (ед.) Тогда
$$P = 80 \cdot (30 - 25) = 400 \text{ (ден. ед.)}.$$
3) $p < p0$: $\Longrightarrow$ $Q = QS$, то есть $P = QSp - QS\,TVC = QS(p - TVC)$,
подставим значения:
$$P = (6p - 100)(p - 25) = 6p2 - 250p + 2500.$$
Далее случаи (1) и (3) можно решать аналитически, подставляя различные значения цены из интервала её значений или как-либо иначе, но гораздо проще выявить экстремумы прибыли через производную:

1) $P = -\ 4p2\ +\ 300p - 5000$. Тогда

$$P' = -\ 8p\ +\ 300;$$

$$-\ 8p\ +\ 300 = 0\ \Rightarrow\ p = \frac{75}{2} = 37{,}5\ (\text{ден. ед.}).$$

Значит, $Q = QD = 200 - \ 4 \cdot 37{,}5 = 200 - \ 150 = 50$ (ед.),

$P_1 = -\ 4p^2 +\ 300p - 5000 = -\ 4 \cdot 37{,}5^2 + 300 \cdot 37{,}5 - \ 5000 = 625$ (ден. ед.).

2) Во втором случае прибыль была уже найдена: $P_2 = 400$ (ден. ед.).

3) $P = 6p2 - \ 250p\ +\ 2500$. Тогда

$$P' = 12p - \ 250;$$

$$12p - \ 250 = 0\ \Rightarrow\ p = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}\ (\text{ден. ед.}).$$

Значит, $Q = QS = 6 \cdot 20\frac{5}{6} - \ 100 = 125 - \ 100 = 25$ (ед.), а

$$P_3 = 6p^2 - 250p + 2500 = 6 \cdot \left(20\frac{5}{6}\right)^2 - 250 \cdot 20\frac{5}{6} + 2500 = -\ 104\frac{1}{6}\ (\text{ден. ед.}).$$

Можно заключить, что прибыль максимальна в первом случае, следовательно, цена единицы продукции должна равняться *37,5* денежным единицам.

Задача 3. Найти объём производства, при котором фирма, действующая на рынке совершенной конкуренции, будет получать максимальную прибыль, если

$$P = 15, TC(Q) = Q^3 + 3Q\ [3].$$

Решение. Прибыль фирмы, действующей на рынке совершенной конкуренции, максимизируется при равенстве предельной выручки и предельных издержек: *MR=MC*. Поскольку при совершенной конкуренции наблюдается равенство цены и предельной выручки: *P=MR*, то можно утверждать, что фирма максимизирует прибыль при *P=MC*.

Найдём предельные издержки

$$MC = TC' = 3Q^2 +\ 3.$$

$$3Q^2\ +\ 3 = 15;$$

$$3Q^2 = 12\ \Rightarrow Q = 2.$$

Итак, мы выяснили, что при цене *P=15* фирма предложит на продажу 2 единицы продукции.

В результате проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Производная является важнейшим инструментом экономического анализа, позволяющим углубить геометрический и математический смысл экономических понятий, а также выразить ряд экономических законов с помощью математических формул.
2. При помощи производной можно значительно расширить круг рассматриваемых при решении задач функций.

3. Экономический смысл производной состоит в следующем: производная выступает как скорость изменения некоторого экономического процесса с течением времени или относительно другого исследуемого фактора.
4. Наиболее актуально использование производной в предельном анализе, то есть при исследовании предельных величин (предельные издержки, предельная выручка, предельная производительность труда или других факторов производства и т. д.).
5. Производная находит широкое приложение в экономической теории. Многие, в том числе базовые, законы теории производства и потребления, спроса и предложения оказываются прямыми следствиями математических теорем (например, представляет интерес экономическая интерпретация теоремы Ферма, выпуклости функции и т. д.).
6. Знание производной позволяет решать многочисленные задачи по экономической теории.

Библиография:

1. АКИРИ, И., ЧОБАНУ, В., ЕФРОС, П., ГАРИТ, В., НЯГУ, В., ПРОДАН, Н., ТАРАГАН, Д., ТОПАЛЭ, А., *Математика: Учебник для 11-го класса,* Editura Prut Internaţional, 2020.
2. КОЧЕРЖОВА, Е.Н., БОТАШЕВА, Л.Р., ЦЫПЛАКОВА, О.Н., *Роль производной в экономике* // *Современные наукоемкие технологии*, 2013
3. СТАРОВОЙТОВ, М.А., ИВАХНЕНКО, Н.Н., *Применение производной в экономических расчетах.* Доступно [Online]: http://www.rusnauka.com/1_NIO_2011/Economics/77694.doc.htm