CZU 512.64

UTILIZAREA MATRICELOR ÎN DIFERITE DOMENII

Lilia BERJAN, *studentă, Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului, Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălți*
Conducător științific: **Tatiana ROTARI,** *asist. univ.*

Abstract: *In this article we will study the notion of matrix. The application of matrices in practical problems, as well as in applied problems from different fields such as economics, chemistry, psychology. Thus, the importance of studying mathematics in various fields becomes relevant.*

Keywords: *matrix, determinant, balanced chemical equations, matrix operations, electric circuit, population migration, Raven's progressive matrices.*

Urmele utilizării matricilor datează din primele secole î.Hr. De-a lungul istoriei, matematicienii, în timpul studiului sistemelor liniare, au aranjat coeficienții sistemului sub formă de tabel, ceea ce relevă utilizarea matricelor din cele mai vechi timpuri. Cu toate acestea, abia în secolul al XVII-lea, ideea matricilor a fost reînviată și dezvoltată, mai întâi cu rezultate și idei obținute în contexte specifice de studiu, apoi cu generalizarea lor. Dezvoltarea a continuat în cele din urmă până când teoria matricii a primit forma pe care o cunoaștem astăzi.

Definiție. Se numește matrice de tip (m, n) sau $m \times n, m, n \in N^*$ un tablou

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

format din $m \times n$ elemente aranjate în m linii și n coloane [1, p. 185].

Dacă $m = n$ matricea se numeşte matrice pătratică de ordinul n. Matricea pătratică de ordinul n de forma $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ se numeşte matrice unitate şi se mai notează cu I [1, p. 186].

Utilizarea matricelor în economie

Problema 1. Cinci şantiere de construcţie C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 folosesc cărămidă produsă la fabrici amplasate în localităţile A, B, C. Numărul de paleţi cu cărămidă transportaţi de la fabrici la şantiere în primele trei luni ale anului sunt date respectiv de matricele: M_1, M_2, M_3:

$$M_1=\begin{pmatrix}4&7&10&8&5\\10&8&4&0&6\\3&3&4&10&7\end{pmatrix},\ M_2=\begin{pmatrix}2&1&0&3&4\\6&3&4&2&2\\3&3&1&4&0\end{pmatrix},\ M_3=\begin{pmatrix}4&2&3&0&2\\3&0&1&3&4\\6&7&4&3&1\end{pmatrix}.$$

Aplicând operaţii cu matrice, să se determine numărul total de paleţi cu cărămidă transportaţi de la fiecare fabrică la fiecare şantier în aceste trei luni [1, p. 194].

Rezolvare. Pentru a afla numărul total de paleţi cu cărămidă transportaţi de la fiecare fabrică la fiecare şantier în aceste trei luni este suficient de adunat cele 3 matrici:

$$M=M_1+M_2+M_3=$$

$$=\begin{pmatrix}4&7&10&8&5\\10&8&4&0&6\\3&3&4&10&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&0&3&4\\6&3&4&2&2\\3&3&1&4&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&2&3&0&2\\3&0&1&3&4\\6&7&4&3&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}10&10&13&11&11\\19&11&9&5&12\\12&13&9&17&8\end{pmatrix}$$

Răspuns. Numărul total de paleţi cu cărămidă transportaţi de la fiecare fabrică la fiecare şantier în trei luni este dat de matricea:

$$M=\begin{pmatrix}10&10&13&11&11\\19&11&9&5&12\\12&13&9&17&8\end{pmatrix}$$

Problema 2. O întreprindere preconizează să procure 3 tipuri de mașini T_1, T_2, T_3 de la 3 furnizori F_1, F_2, F_3 numărul de mașini procurate de la fiecare furnizor este indicat în următoarea matrice:

$$M=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}T_1&T_2&T_3\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\F_1\\F_2,\\F_3\end{array}$$

În funcţie de varianta de completare a acestor maşini (două variante: V_1 şi V_2), întreprinderea le poate procura de la fiecare furnizor la următoarele preţuri (u.m.):

$$P=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}V_1&V_2\end{array}\\\begin{pmatrix}5{,}1&4{,}1\\5{,}2&4{,}0\\5{,}0&3{,}8\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\F_1\\F_2\\F_3\end{array}$$

Să se determine suma care trebuie achitată fiecărui furnizor (în ambele variante) [1, p. 196].

Rezolvare. Pentru a afla suma achitată de fiecare furnizor este suficient de a alcătui suma produselor liniei i din matricea M cu coloana j din matricea P, ceea ce reflectă înmulțirea matricelor M și P.

$$S=M\cdot P=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5{,}1&4{,}1\\5{,}2&4{,}0\\5{,}0&3{,}8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15{,}5&11{,}7\\10{,}3&8{,}1\\15{,}4&11{,}8\end{pmatrix}.$$

Răspuns. Suma achitată de fiecare furnizor este dată de matricea:

$$S = \begin{pmatrix} 15{,}5 & 11{,}7 \\ 10{,}3 & 8{,}1 \\ 15{,}4 & 11{,}8 \end{pmatrix}$$

Problema 3. O întreprindere produce trei tipuri de articole A_1, A_2, A_3, pentru care se folosește materie primă de două tipuri M_1, M_2. Cantitățile de materie primă utilizată la producere sunt caracterizate de matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, unde fiecare element $a_{ij}, (\ i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2)$ indică ce cantitate de materie primă de tipul M_j se utilizează la producerea articolului de tipul A_i. Admitem că planul de producere este dat de matricea de tip linie $B\ =\ (100\ 80\ 50)$, iar costurile fiecărui tip de materie primă (în unități bănești) sunt date de matricea de tip coloană $C = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix}$. Aflați costul total al materiei prime utilizate de întreprindere în producere [6, p. 160].

Conform datelor problemei, obținem că cantitățile de materie primă pentru fiecare tip constituie respectiv

$$K_1 = 100 \cdot 5 + 80 \cdot 8 + 50 \cdot 1 = 1190\ (u.c.)$$
$$K_2 = 100 \cdot 6 + 80 \cdot 2 + 50 \cdot 4 = 960\ (u.c.)$$

Astfel obținem matricea de tip linie $K\ =\ (1190\ 960)$, care reprezintă matricea cantităților ambelor tipuri de materie primă ca produsul matricelor B și A. Deci,

$$K = B \cdot A = (100\ 80\ 50) \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix} =\ (1190\ 950).$$

Atunci costul total al materiei prime este $Q = 1190 \cdot 50 + 960 \cdot 30 =$ 88300, care la fel poate fi scris în formă matriceală $Q = K \cdot C = (B \cdot A) \cdot C =$ (88300). Deci, costul total al materiei prime utilizate de întreprindere este de 88300 (u.c.) bănești. Observăm că, costul total al materiei prime poate fi calculat și altfel, în altă ordine. La început calculăm matricea costurilor cheltuielilor materiei prime la o unitate de producere, adică

$$T = A \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430 \\ 460 \\ 170 \end{pmatrix}.$$

Apoi aflăm costul total al materiei prime $Q = B \cdot T = (100\ 80\ 50) \cdot \begin{pmatrix} 430 \\ 460 \\ 170 \end{pmatrix} =$ (88300).

Răspuns. Costul total al materiei prime utilizate de întreprindere în producere este de 88300 (u. c.).

În așa mod, în acest exemplu se arată și aplicabilitatea practică a legii asociative a înmulțirii matricelor: $Q = (B \cdot A) \cdot C = B \cdot (A \cdot C)$.

Utilizarea matricelor în biologie

Problema 4. Fie date două populații, în prima genomul A este deținut de $\frac{3}{4}$ de populație, iar în a doua $\frac{1}{2}$ din populația totală. Apoi, respectiv, genomul B din prima populație este deținut de $\frac{1}{4}$ și de $\frac{1}{2}$ din a doua populație. Fie în fiecare generație $\frac{1}{3}$ din fiecare populație migrează în alta. Întrebarea: la ce va duce efectul de deviere genetică? [4, p. 85]

Deci, alcătuim o matrice de migrare M și o matrice de frecvențe ale tuturor genelor Q:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Să notăm ecuația de migrare și să definim noi frecvențe genetice:

$$Q' = Q \times M$$

$$Q' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Din valorile găsite, se poate observa că efectul de deviere genetică duce la convergența frecvențelor genomului A în aceste două populații: valoarea mai mare $\frac{3}{4}$ scade la $\frac{2}{3}$ iar valoarea inferioară $\frac{1}{2}$ crește la $\frac{7}{12}$. În ceea ce privește genomul B, se poate trage aceeași concluzie:

Dacă vrem să determinăm frecvențele genetice în următoarea generație, atunci avem nevoie de o ecuație de deviere:

$$Q'' = Q' \times M.$$

Sarcina, în general, este rezolvată, se stabilește devierea genetică. Și în concluzie, aș dori să remarc faptul că ecuația devierii este foarte importantă în genetica populației, deoarece poate fi folosită nu numai pentru a determina modificări ale frecvențelor genetice din valorile de migrare cunoscute, ci invers, din frecvențele cunoscute, se pot calcula coeficienții de migrare.

Exemplu din domeniul chimie

Problema 5. Echilibrați ecuația chimică [7, p 1]:

$$H_2 + O_2 \rightarrow H_2O$$

Pentru a găsi coeficienții de echilibrare a ecuației scriem ecuația cu coeficienți de echilibrare (a, b, c), identificând câte molecule ale elementului sunt prezente pe fiecare parte a ecuației.

$$aH_2 + bO_2 \rightarrow cH_2O \text{ (1)}$$

Ecuația (1) implică faptul că:

H: 2a + 0b = 2c

O: 0a +2b = 1c.

Utilizarea acestor două ecuații face posibilă configurarea a două matrice. Matricea A conține partea stângă a reacției și matricea B, care este o matrice coloană, deține partea dreaptă a ecuației. Primul rând este prima ecuație, iar al doilea rând este a doua ecuație, amestecarea ordinii va duce la coeficienți greșiți. De aceea, găsim inversul și determinantul matricei A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}, det(A) = 2 \times 2 = 4, \; B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pentru a calcula coeficienții a și b, înmulțim inversul matricei A cu B și determinantul matricei A. Matricea finală dă coeficienții a și respectiv b, c fiind determinantul matricei A.

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times 4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, c = 4.$$

$$4H_2 + 2O_2 \rightarrow 4H_2O$$

Ceea ce este echivalent cu: $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$ dacă simplificăm cu 2.

Utilizarea matricelor în fizică

Problema 6. Este dat un circuit electric (Fig. 1):

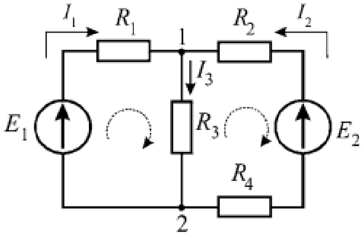

Fig. 1. *Circuitul electric*

Este necesar să se determine curenții din ramuri folosind legile lui Kirchhoff. Parametrii elementelor circuitului electric sunt următorii: $R_1 = 45\,\Omega, R_2 = 15\,\Omega, R_3 = 45\,\Omega, R_4 = 75\,\Omega, E_1 = 60\,V, E_2 = 450\,V$ [2, p 347].

Să compunem o ecuație folosind prima lege Kirchhoff pentru nodul 1, care afirmă că suma intensităților curenților care intră într-un nod de rețea este egală cu suma intensităților curenților care ies din același nod:

$$I_1 + I_4 = I_2 + I_3.$$

După ce am ales direcțiile de ocolire a contururilor, putem scrie ecuația conform celei de-a doua legi Kirchhoff, conform căreia suma algebrică a tuturor căderilor de tensiune dintr-un ochi de rețea este egală cu zero, adică $I_1 + I_2 - I_3 = 0$. Ca rezultat, obținem un sistem de trei ecuații

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0, \\ I^1R^1 + I^3R^3 = E^1, \\ -I^2(R^2 + R^4) - I^3R^3 = -E^2. \end{cases}$$

Acest sistem poate fi rezumat la ecuația matriceală $A \cdot X = B$, unde matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 45 & 0 & 45 \\ 0 & -90 & -45 \end{pmatrix}$ reprezintă rezistența, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ -450 \end{pmatrix}$ – energia, X – intensitatea curenților,

$$X = A^{-1} \times B.$$

Pentru a determina matricea inversă vom utiliza metoda Gauss-Jordan:

$$\left(A \,\middle|\, I_3\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 45 & 0 & 45 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -90 & -45 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -45 & 90 & -45 & 1 & 0 \\ 0 & -90 & -45 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1/45 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1/45 & 0 \\ 0 & 0 & -225 & 90 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/5 & 1/75 & 1/225 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & -1/225 & -2/225 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 & 2/225 & -1/225 \end{array}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{75} & \frac{1}{225} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{255} & -\frac{2}{225} \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{255} & -\frac{1}{255} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ -450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{56}{15} \\ \frac{38}{15} \end{pmatrix}.$$

Răspuns. Intensitatea curenților este dată de matricea $X = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{56}{15} \\ \frac{38}{15} \end{pmatrix}$.

Exemplu din domeniul psihologiei

Matricele progresive ale lui Raven reprezintă un test pentru gândirea vizuală și în același timp abstractă prin analogie, dezvoltat de englezi [3, pp. 39-43].

Fiecare sarcină constă din 2 părți: desenul principal (un model geometric) cu un spațiu în colțul din dreapta jos și un set de 6 sau 8 fragmente situat sub desenul principal. Dintre aceste fragmente, este necesar să fie ales unul care, fiind pus în locul golului, să se potrivească exact desenului în ansamblu. Matricele progresive ale lui Raven sunt împărțite în 5 serii a câte 12 matrici fiecare. Datorită creșterii numărului de elemente matrice și a complicării principiilor relațiilor, sarcinile devin treptat mai complicate atât în cadrul aceleiași serii, cât și la trecerea de la serie la serie. Există și o versiune ușoară a matricelor progresive ale lui Raven, destinată studiului copiilor și adulților cu tulburări mintale.

Exemple de astfel de matrici sunt prezentate în fig. 2:

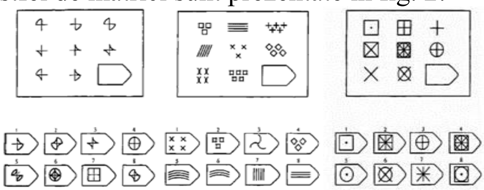

Fig. 2. *Matrici în psihologie*

Concluzii. Am luat în considerare principalele domenii de aplicare a matricelor. S-a dovedit că acest termen este folosit nu numai în matematică, ci și în alte științe, cum ar fi biologia, chimia, fizica, psihologia, economia etc. În plus, matricele pot fi aplicabile practic, în problemele întâlnite in viața de zi cu zi.

Bibliografie:

1. ACHIRI, Ion, et al., 2020 „*Manual cl. XI*”. Editura Prut Internaţional, 2020. 304 p. ISBN 978-9975-54-514-3;
2. ГУЛАЙ, Татьяна. Применение систем линейных алгебраических уравнений при расчете электрических цепей. В *Международный студенческий научный вестник*. 2017. Номер 4-4, стр. 522-524. ISSN 2409-529X;
3. Венгер А. *„Психологические рисуночные тесты: иллюстрированное руководство”*. Издательство: ВЛАДОС-ПРЕСС, 2007 г. 159 стр. ISBN 978-5-305-00058-0;
4. SMITH, John Maynard. *„Mathematical Ideas in Biology”*. Publisher: Cambridge University Press, 1968. 152 p. ISBN 9780521095501;
5. DOSESCU, Tatiana. „*Matematică pentru modelare economică*”. Vol. 1. Ed. Universitară, București, 2011. ISBN 978-606-591-308-0;
6. Rocşoreanu, Carmen. „*Matematici aplicate”*. Editura Sitech, Craiova, 2005. 265p. ISBN 973-746-032-4;
7. BARRET, Emilee. *„Using Matrices to Balance Chemical Reactions and Modeling the Implications of a Balanced Reaction”* Undergraduate Journal of Mathematical Modeling: One + Two: Vol. 10: Iss. 1, Article 5. 2019. 20 p. ISSN: 2326-3652.