CZU 517.3

КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КОМПЛЕКСНОГО И ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО СЛУЧАЕВ

Елена ПРИСАКАРЬ, *студентка, факультет реальных наук, экономики и окружающей среды, Бельцкий государственный университет имени Алеку Руссо,*
Научный руководитель: **Наталья ГАЩИЦОЙ,** *доктор, конференциар.*

Rezumat: *În acest articol analizăm anumite probleme referitoare la calculul integralelor curbilinii și al integralelor de-a lungul unui drum al funcțiilor de variabilă complexă, precum și unele probleme din fizică care sunt rezolvate folosind aceste integrale. Realizând o analiză comparativă a proprietăților acestor tipuri de integrale, arătăm că o integrală complexă este o combinație de integrale: în cazul general, este o pereche de integrale curbilinii de speța a doua.*

Cuvinte-cheie: *curbă, integrală curbilinie, integrală a unei funcții de variabilă complexă, lungime, schimbare de parametri.*

Введение: В данной статье определены такие понятия, как: криволинейный интеграл I рода, криволинейный интеграл II рода, интеграл от функции комплексного переменного; представлены примеры решения некоторых задач на вычисление данных интегралов, их приложения в механике и геометрии; проведен сравнительный анализ свойств криволинейного интеграла I рода, криволинейного интеграл II рода и интеграла от функции комплексного переменного.

Что собой представляет криволинейный интеграл I рода?

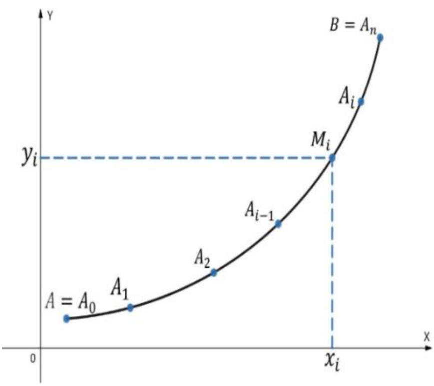

Рис. 1: *Плоская кривая* ***AB***

Пусть $\Gamma \subset Oxy$ гладкая или кусочно-гладкая плоская кривая, в точках которой задана действительная функция $f(M) = f(x, y)$. Выберем разбиение $T = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ кривой AB с точками деления $A_0 = A, A_1, \ldots, A_n = B$. Длины элементарных дуг $A_{i-1}A_i$ обозначим через Δs_i, а максимальную из этих длин через $\lambda = \lambda(T)$. Возьмем на каждой дуге $A_{i-1}A_i$ по точке $M_i(x_i;\ y_i)$. Составим сумму вида:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i\,, y_i)\Delta s_i, \qquad (1.1)$$

которую называют интегральной суммой функции $f(x, y)$ вдоль кривой AB.

Пусть существует предел I интегральных сумм (1.1) при $\lambda(T) \to 0$, не зависящий ни от выбора разбиения кривой AB, от выбора точек M_i на элементарных дугах, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любого разбиения $T = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ кривой AB с параметром $\lambda(T) < \delta(\varepsilon)$ при любом выборе точек M_i на дугах $A_{i-1}A_i$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i - I\right| < \varepsilon \qquad (1.2)$$

Такой предел называют *криволинейным интегралом первого рода вдоль кривой* AB и обозначают

$$I = \int_{AB} f(x,y)ds.$$

Итак,

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i. \qquad (1.3)$$

Задача 1: Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\Gamma} xyds$ *по дуге окружности* $x(t) = cost, y(t) = sint$ *при изменении параметра* $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$.

Решение: указанным пределам изменения параметра соответствует левая верхняя дуга единичной окружности (Рис.2):

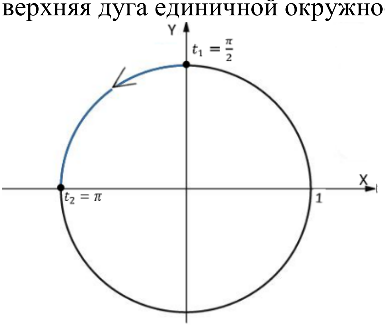

Рис. 2: *Единичная окружность*

По условию, значение параметра возрастает, поэтому:

$$\int_{\Gamma} f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f\big(x(t); y(t)\big) \cdot \sqrt{(x_t'(t))^2 + (y_t'(t))^2}\, dt$$

Итак:

$$\int_{\Gamma} xyds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cost \cdot sintdt = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \cos 2t \,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{1}{4}(\cos 2\pi - \cos\pi) = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Задача 2: Вычислить $\int_{\Gamma}\left(2z - \sqrt{x^2 + y^2}\right) ds$, *где Г- первый виток конической винтовой линии* $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t$. [3, с. 236]

Решение: Найдем производные:

$x_t'(t) = \cos t - t\sin t$, $y_t'(t) = \sin t + t\cos t$, $z_t'(t) = 1$,

$ds = \sqrt{t^2 + 2}dt$,

Получим:

$$\int_{\Gamma}\left(2z - \sqrt{x^2 + y^2}\right) ds = \int_0^{2\pi} t\sqrt{t^2 + 2}dt = \frac{1}{3}\sqrt{(t^2 + 2)^3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left((2\pi^2 + 1)^{3/2} - 1\right).$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left((2\pi^2 + 1)^{3/2} - 1\right)$.

Криволинейные интегралы были изобретены в начале XIX века для решения задач, касающихся электричества, магнетизма, а также потоков жидкости, поэтому они нашли многочисленные применения в математике, физике и прикладных расчетах.

Какие задачи решаются с помощью криволинейного интеграла I рода? Пусть $\Gamma \subset Oxy$ гладкая или кусочно-гладкая плоская кривая, тогда имеют место:

Геометрическое приложение:

Длина кривой: $L_\Gamma = \int_\Gamma ds$.

Некоторые приложения в механике:

Предположим, что материальная кривая (например, кусок проволоки) описывается некоторой плоской кривой Г, а распределение массы вдоль кривой задано непрерывной функцией плотности $\mu(x,y)$, тогда можно вычислить:
Массу материальной кривой (например, проволоки): $m = \int_{\widehat{AB}} \mu(x,y)ds$;
Статические моменты кривой: $M_X = \int_{\widehat{AB}} y \cdot \mu(x,y)ds$, $M_Y = \int_{\widehat{AB}} x \cdot \mu(x,y)ds$;
Координаты центра тяжести: $x_0 = \frac{M_Y}{m}$, $y_0 = \frac{M_X}{m}$;
Моменты инерции: $I_x = \int_{\widehat{AB}} y^2 \cdot \mu(x,y)ds$, $I_y = \int_{\widehat{AB}} x^2 \cdot \mu(x,y)ds$, $I_0 = \int_{\widehat{AB}}(x^2 + y^2) \cdot \mu(x,y)ds$;

Задача 3: Найти массу дуги линии $x = e^t cost$, $y= e^t sint, z = e^t$, *от точки, соответствующей t=0, до произвольной точки, если плотность дуги обратно пропорциональна квадрату полярного радиуса и в точке (1,0,1) равна единице.* [3, с. 236]

По условию:

$$\mu(x,y,z) = \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{(e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2} = \frac{1}{e^{2t}}.$$

Найдем производные:

$x'_t(t) = e^t \cos t - e^t \sin t$, $y'_t(t) = e^t \sin t + e^t \cos t$, $z'_t(t) = e^t$;

Тогда:

$$ds = \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + e^{2t}}dt = \sqrt{3}e^t.$$

$$m = \int_{\widehat{AB}} \mu(x,y)ds = \sqrt{3}\int_0^k \frac{e^t}{e^{2t}}dt = \sqrt{3}\int_0^k e^{-t}dt = \sqrt{3}(1 - e^{-k}).$$

Ответ: $m = \sqrt{3}(1 - e^{-k})$.

Что собой представляет криволинейный интеграл II рода?

Пусть на плоскости Oxy задана кривая AB и на этой кривой - непрерывные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Разобьем кривую AB точками $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ на элементарные дуги $A_{i-1}A_i$ и выберем на каждой дуге $A_{i-1}A_i$ точку $M_i(x_i;\ y_i)$(рис. 1). Обозначим через x_i, y_i координаты точки A_i. Кроме того, обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ проекции векторов $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на координатные оси Ox и Oy. Составим интегральные суммы:

$$\sum_{i=1}^n P(x_i, y_i)\Delta x_i \text{ и } \sum_{i=1}^n Q(x_i, y_i)\Delta y_i \qquad (2.1)$$

вдоль кривой AB для функции $P(x,y)$ по переменному x и для функции $Q(x,y)$ по переменному y. Через λ обозначим максимальную из длин Δs_i элементарных дуг $A_{i-1}A_i$, т.е. $\lambda = max_{i=\overline{1,n}}\Delta s_i$.

Если существуют пределы I_1, I_2 интегральных сумм (2.1) при $\lambda \to 0$, не зависящие ни от разбиения кривой AB на элементарные дуги, ни от выбора точек M_i на этих дугах, то эти пределы называют криволинейными интегралами II рода вдоль кривой AB от функции $P(x,y)$ по переменному x и от функции $Q(x,y)$ по переменному y и обозначают:

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx \text{ и } \int_{\widehat{AB}} Q(x,y)dy.$$

Итак, по определению:

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} P(x_i\,,y_i)\Delta x_i, \qquad (2.2)$$

$$\int_{\widehat{AB}} Q(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(x_i\,,y_i)\Delta y_i, \qquad (2.3)$$

Криволинейным интегралом II рода в общем виде называется выражение:

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + \int_{\widehat{AB}} Q(x,y)dy = \int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (2.4)$$

Задача 4: $\int_{\Gamma}(x^2 - y^2)dx$, *где* Г– *дуга параболы* $y = x^2$ *от точки (0;0) до точки (2;4).* [3, с. 238]

Запишем формулу для вычисления данного интеграла:

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t)\big)x'(t)dt.$$

Запишем уравнение параболы у $= x^2$ в параметрическом виде следующим образом:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}; \; x'(t) = 1$$

Тогда:

$$\int_{\Gamma}(x^2 - y^2)dx = \int_0^2 (t^2 - t^4)dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_0^2 = -\frac{56}{15}.$$

Ответ: $-\frac{56}{15}$.

Задача 5: $\int_{\Gamma}(2a - y)dx - (a - y)dy$, *где Г – первая (от начала координат) арка циклоиды* $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$. [3, с. 239]

Запишем формулу для вычисления данного интеграла:

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + \int_{\widehat{AB}} Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta}\Big(P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)dt.$$

Найдем производные:

$$x_t'(t) = a(1 - \cos t),\; y_t'(t) = a\sin t$$

Пределы интегрирования будут: $t_1 = 0;\; t_2 = 2\pi$. (Рис. 3)

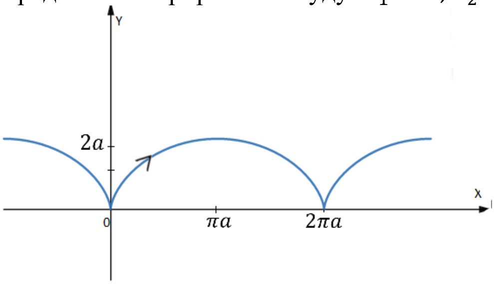

Рис. 3: *Первая арка циклоиды*

Тогда:

$$\int_{\Gamma}(2a - y)dx - (a - y)dy =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2t dt = \pi a^2.$$

Ответ: πa^2.

Какие задачи решаются с помощью криволинейного интеграла II рода?

Пусть Г ⊂ Оху гладкая или кусочно-гладкая плоская кривая, тогда имеют место:

Геометрическое приложение:

Пусть (S) – квадрируемая область на плоскости Oxy, тогда площадь области (S) может быть найдена по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} xdy - ydx.$$

Физический смысл:

Пусть $\vec{F} = \{P(x,y); Q(x,y)\}$ – сила, под действием которой точка перемещается по кривой Г. Работа, которую совершает сила $\vec{F}$, будет равна:

$$A = \int_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Задача 6: В каждой точке плоскости на материальную точку действует сила F, проекции которой на оси координат равны $X = xy, Y = x + y$. Вычислить работу силы F при перемещении точки из начала координат в точку (1,1) по параболе $y = x^2$. [3, с. 242]

Решение: Запишем формулу для вычисления работы:

$$A = \int_{\widehat{AB}} X(x,y)dx + \int_{\widehat{AB}} Y(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (X\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Y\big(x(t),y(t)\big)y'(t))dt.$$

Уравнение параболы $y = x^2$ в параметрическом виде будет: $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$

Найдем производные:

$$x_t'(t) = 1, y_t'(t) = 2t$$

Получим:

$$A = \int_0^1 (t^3 \cdot 1 + t(1+t) \cdot 2t)dt = \left[\frac{3t^4}{4} + \frac{2t^3}{3}\right]\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = \frac{17}{12}.$$

Ответ:$A = \frac{17}{12}$.

Интеграл от функции комплексного переменного по некоторому пути:

Пусть $\Gamma: [\alpha, \beta] \to C$, где $[\alpha, \beta] \subset R$, кусочно-гладкий путь, а на соответствующей кривой, которую мы также обозначим через Г, определена комплексная функция f так, что функция $f\,(\Gamma\,(t))$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta] \subset R$. Тогда функция с комплексными значениями $\Gamma\,(t) = f\,(\Gamma\,(t)) \cdot \Gamma'\,(t)$ действительного аргумента t интегрируема по Риману на отрезке $[\alpha, \beta]$. Интеграл от функции f по пути Г определяется как интеграл по интервалу параметров $[\alpha, \beta]$ кривой Г: [1, с. 101]

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\Gamma(t)\big) \cdot \Gamma'(t)dt.$$

Задача 7: Вычислить $\int_{\Gamma} \bar{z}\,dz$, если Г *– астроида $z = cos^3t + i\,sin^3t$, $0 \le t \le 2\pi$.* [2, с. 84]

Для решения данной задачи воспользуемся следующей формулой:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)dt.$$

$$dz = (-3cos^2t \cdot \sin t + 3isin^2t \cdot \cos t)dt$$

$$\bar{z} = cos^3t - i\,sin^3t$$

$$\int_\Gamma \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} (cos^3 t - \ i\,sin^3 t)\cdot(-3cos^2 t\cdot \sin t + 3i sin^2 t\cdot \cos t)dt =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} cos^5 t d(\cos t) + \frac{3i}{4}\int_0^{2\pi} sin^2 2t dt + 3\int_0^{2\pi} sin^5\, t d(\sin t) = \frac{3\pi i}{4}.$$

Ответ: $\frac{3\pi i}{4}$.

Задача 8: Вычислить $\int_\Gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}$*, если контур* Γ *– нижняя полуокружность* $|z| = 1$*; выбирается та ветвь функции* $\sqrt{z}$*, для которой* $\sqrt{1} = -1$*. Начальная точка пути интегрирования – точка* $z = 1$. [2, с. 84]

Решение: Учитывая направление, пределы интегрирования будут:

$$t_1 = 0; t_2 = -\pi. \text{ (Рис. 4)}$$

$$|z| = 1 \Rightarrow z = e^{it},$$

$$dz = ie^{it}dt$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n})$$

$$n = 2, |z| = 1, \arg z = t, \sqrt{z} = \cos\frac{t+2k\pi}{2} + i\sin\frac{t+2k\pi}{2}.$$

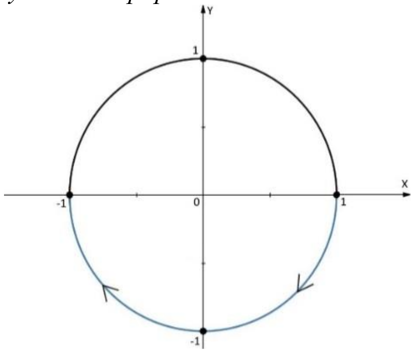

Рис.4: *Единичная окружность*

$$\sqrt{1} = -1 \Rightarrow -1 = \cos\frac{0+2k\pi}{2} + i\sin\frac{0+2k\pi}{2} \Rightarrow k = -1.$$

$$f(\gamma(t)) = \frac{1}{\cos\frac{t+2\pi}{2} + i\sin\frac{t+2\pi}{2}} = e^{-i\frac{t+2\pi}{2}}.$$

$$\int_\Gamma \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{-\pi} e^{-i\frac{t+2\pi}{2}}\cdot ie^{it}dt = -2\left[e^{\frac{it}{2}}\right]\begin{matrix}-\pi\\0\end{matrix} = 2(i+1).$$

Ответ: $2(i+1)$.

Задача 9. Вычислить интеграл $\int_{|z|=1} z^n \cdot Log\, z\, dz$*, где n-целое число и* $Log\ 1 = \ 0$. [4, с. 55]

Решение: $Log\ z = ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), k \in Z$.

$$Log\ 1\ =\ 0 \Rightarrow \begin{cases}|z| = 1\\ k = 0\end{cases}$$

$$\int\limits_{|z|=1} z^n\cdot Log\, z\, dz = -\int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}t dt.$$

Используя метод интегрирования по частям, получим:

Если $n \neq -1$: $I = \frac{2\pi i}{n+1}$.

Если $n = 1$: $I = -2\pi^2$.

Сравнительный анализ свойств криволинейного интеграла и интеграла от функции комплексного переменного.

Криволинейный интеграл I рода, криволинейный интеграл II рода, интеграл от функции комплексного переменного обладают таким общим свойством, как линейность, то есть постоянный множитель можно выносить за знак интеграла и интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от данных функций.

Криволинейный интеграл I рода:

Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$ интегрируемы вдоль кривой Г. Тогда:

$$\int_{\Gamma} C \cdot f(M)ds = C\int_{\Gamma} f(M)ds, C = const;$$

$$\int_{\Gamma}(f(M) + g(M))ds = \int_{\Gamma} f(M)ds + \int_{\Gamma} g(M)ds.$$

Криволинейный интеграл II рода:

$$\int_{\widehat{AB}} C \cdot P(x,y)dx = C\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx; \int_{\widehat{AB}} C \cdot Q(x,y)dy = C\int_{\widehat{AB}} Q(x,y)dy.$$

$$\int_{\widehat{AB}}(P_1(x,y) + P_2(x,y))dx = \int_{\widehat{AB}} P_1(x,y)dx + \int_{\widehat{AB}} P_2(x,y)dx.$$

$$\int_{\widehat{AB}}(Q_1(x,y) + Q_2(x,y))dy = \int_{\widehat{AB}} Q_1(x,y)dy + \int_{\widehat{AB}} Q_2(x,y)dy.$$

Интеграл от функции комплексного переменного:

Если функции $f\ (z)$ и $g\ (z)$ непрерывны вдоль кусочно-гладкого пути Г¸ и $a, b\ \in\ C$, то

$$\int_{\Gamma}\big(a \cdot f(z) + b \cdot g(z)\big)dz = a\int_{\Gamma} f(z)dz + b\int_{\Gamma} g(z)dz.$$

Еще одним общим свойством данных интегралов является – аддитивность.

Криволинейный интеграл I рода:

Пусть функция $f(M)$ интегрируема вдоль кривой Г. Если кривая Г разбита на две дуги, то криволинейный интеграл I рода по всей кривой равен сумме криволинейных интегралов I рода по каждой из этих дуг:

$\int_{\Gamma} f(M)ds = \int_{\Gamma_1} f(M)ds + \int_{\Gamma_2} f(M)ds$, где $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Криволинейный интеграл II рода:

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\widehat{AC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{\widehat{CB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Интеграл от функции комплексного переменного:

Если функция $f\ (z)$ непрерывна вдоль $\Gamma\ =\ \Gamma_1\ \cup\ \Gamma_2$, то

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

Криволинейный интеграл I рода отличается от криволинейного интеграла II рода и от интеграла от функции комплексного переменного тем, что он не зависит от направления.

Криволинейный интеграл I рода:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{BA} f(x,y)ds.$$

Криволинейный интеграл II рода зависит от направления движения по кривой. При изменении направления обхода кривой криволинейный интеграл II рода меняет знак, т.е.

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Интеграл от функции комплексного переменного:

Предположим, что $\Gamma^{-}: [\alpha, \beta] \to C$ получается из кусочно-гладкого пути $\Gamma: [\alpha, \beta] \to C$ путем изменения направления, т. е.

$$\Gamma^{-}(t) = \Gamma(\alpha + \beta - t) \text{ для } \alpha \le t \le \beta.$$

Если функция f непрерывна вдоль Г, то она непрерывна и вдоль Γ^{-} и имеет место равенство:

$$\int_{\Gamma^{-}} f(z)dz = -\int_{\Gamma} f(z)dz.$$

И для криволинейных интегралов I, II рода, и для интеграла от функции комплексного переменного справедлив тот факт, что модуль интеграла не превосходит интеграл от модуля подынтегральной функции, но в случае интеграла от функции комплексного переменного необходим модуль и для dz, то есть:

Если функция $f(z)$ непрерывна вдоль кусочно-гладкого пути $\Gamma: [\alpha, \beta] \to C$, то имеет место неравенство:

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| \le \int_{\Gamma} |f(z)||dz|.$$

Вывод: Комплексный интеграл является своеобразным сборником интегралов: в общем случае он представляет собой пару криволинейных интегралов II рода (поскольку так определяется). Вычисление комплексных интегралов фактически сводится к вычислению криволинейного интеграла II рода, которое в конечном итоге сводится к вычислению определенного интеграла.

Библиография:

1. GAȘIȚOI N., *Analiză complexă,* PIM, Iași, 2014 – c. 101-107.
2. БАЛК М., Петров В., Полухин А., *Задачник-практикум по теории аналитических функций,* изд. Просвещение, 1976 – с. 84.
3. БЕРМАН Г.Н., *Сборник задач по курсу математического анализа,* изд. Наука, Москва, 1985 – с. 236-242.
4. ВОЛКОВЫСКИЙ Л. И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г., *Сборник задач по теории функций комплексного переменного,* изд. Физматлит, Москва, 2002 – с. 55.
5. ПОТАПОВ, А. П. *Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной в 2-х ч.* Часть 1: Учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Потапов. – М.: Изд-во Юрайт, 2017.