CZU 519.21(072.3)

ISTORISMUL ÎN PREDAREA ELEMENTELOR DE TEORIE A PROBABILITĂȚILOR ÎN CLASELE LICEALE

Veronica GUȘAN, *studentă, Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului, Universitatea de Stat „Alecu Russo" din Bălți*
Conducător științific: **Natalia GAȘIȚOI,** *dr., conf. univ.*

Abstract: *This article attempts to substantiate the need to study the elements of probability theory in school, to explain what a probabilistic style of thinking entails and to argue the impact of historicism in teaching the elements of probability. It presents a brief history of the development of the theory of probability. Also here are presented the famous problems of the Chevalier de Méré, the solution of which gave rise to the theory of probability. These problems are accompanied by de Méré's reasoning and, then, the correct solution. This is followed by a small analysis of the national curriculum and textbooks on the subject. Finally, it points out some of the benefits that can bring discussions between teacher and students about the elements of the history of mathematics.*
Keywords: *probability theory, probabilistic style of thinking, history of probability, teaching probability in high-school.*

Introducere

Întrebarea cu care, probabil, ar trebui să înceapă acest articol este următoarea: „de ce trebuie studiată teoria probabilităților?". Și este o întrebare actuală luând în considerare problemele cu care se confruntă elevii, atunci când studiază elemente de teoria probabilităților la orele de matematică. A gândi probabilistic nu este atât de ușor pe cât ar părea. De ce se studiază „probabilitatea", în afară de faptul că este interesant, distractiv și cu totul diferit de ceea ce se studiază la orele tradiționale de algebră sau geometrie?

În raportul GAISE (Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education) este indicat: „Probabilitatea este o parte importantă a oricărei educații matematice. Este o parte a matematicii care îmbogățește subiectul în ansamblu prin interacțiunile sale cu alte aplicații ale matematicii. Probabilitatea este un instrument esențial în matematica aplicată, modelarea matematică și statistica matematică." [4, p. 10].

Este vital să înțelegem natura întâmplărilor și a variațiilor în viață, pentru a fi un cetățean bine informat. Este extrem de importantă înțelegerea riscului și a riscului relativ. Când unei persoane i se spune că tocmai șansele lui de a fi doborât de o boală rară s-au dublat, este important ca el să știe că acest lucru se poate datora faptului că s-a trecut de la o șansă la un milion la două șanse la un milion. Șansele s-au dublat, dar totuși probabilitatea că acest lucru se va întâmpla este încă foarte mică. Înțelegerea probabilității este, de asemenea, importantă în ceea ce privește jocurile de noroc. Dacă șansa de câștig la un joc de noroc, într-un anumit moment de timp, este de 99 la sută, trebuie înțeles faptul că tu poți fi acel 1 la sută care nu va câștiga. Da, șansa de câștig este foarte mare, însă asta nu garantează succesul: se poate întâmpla să câștigi, dar poate și să nu se întâmple. Și jocurile de noroc mai acceptabile din punct de vedere social, cum ar fi investițiile pe piața de capital, necesită, de asemenea, o înțelegere a întâmplărilor și a variațiilor.

Stilul probabilistic de gândire presupune distrugerea multor stereotipuri, de exemplu, renunțarea la preferința pentru un comportament strict determinist, care exclude variabilitatea; renunțarea la atitudini negative față de întâmplare: percepția întâmplării ca fiind nu doar un distrugător al planurilor noastre, ci și ca un creator de noi posibilități, presupunând că ordinea se poate naște din haos prin auto-organizare. Stilul probabilistic de gândire poate fi considerat o posibilitate de a prognoza opțiuni de dezvoltare, luând în considerare natura aleatoare a elementelor constitutive și conexiunile dintre acestea; o percepție a întâmplării ca un obiect pentru înțelegerea unei legități necunoscute [7, pp. 4-5].

Stilul probabilistic de gândire se dezvoltă treptat și nu există un timp mai potrivit decât anii de școală pentru fundamentarea acestuia. Din aceste considerente, studierea elementelor de teorie a probabilităților în școală este importantă și necesită o atitudine corespunzătoare atât din partea cadrului didactic, cât și din partea elevului.

Cum a apărut teoria probabilităților?

Ca un orice alt domeniu al științei, matematica reflectă contradicțiile lumii din jurul nostru. Astfel, istoria matematicii este, în mod natural, plină de paradoxuri extraordinare, iar unele dintre ele au servit ca punct de plecare pentru mari schimbări. Matematica „întâmplărilor" este deosebit de bogată în probleme foarte interesante. Potrivit lui Karl Pearson, nu există o altă ramură în matematică în care să fie la fel de ușor să greșești ca în teoria probabilităților. Profesorul trebuie să cunoască cum a apărut această frumoasă teorie, fiindcă istoria apariției ei, ceea cu ce s-a confruntat omenirea până a ajunge la descoperirea teoriei probabilităților poate motiva, poate trezi un interes profund în studiul acesteia de către elevi [8, p. 10].

Originile teoriei probabilităţilor trebuie căutate în interesul purtat de unii nobili din Europa medievală pentru jocurile de noroc. Germenii teoriei probabilităţilor au apărut pe la mijlocul secolului al XVII-lea în lucrările lui Pierre de Fermat (1601-1665), Blaise Pascal (1623-1662) şi Christian Huygens (1629-1695). Pe acele vremuri cavalerul de Méré, un mare amator de jocuri de noroc, susținea că aceste jocuri, uneori, conduc la rezultate care contrazic matematica și s-a adresat, cu rugămintea de a studia renumita sa problemă, lui Blaise Pascal, care, fiind interesat de studiul probabilităților, a început renumita corespondență cu matematicianul Pierre de Fermat. Împreună, ei au fost în stare să rezolve dilema lui de Méré și să formuleze bazele teoriei probabilităților.

Este de menţionat că excentricul savant pasionat de jocuri de noroc, Girolamo Cardano (1501-1576), scrisese *Cartea jocurilor şi a norocului* pe la 1520, dar ea n-a fost publicată decât în 1663. Ulterior, Jacob Bernoulli (1654-1705), Abraham de Moivre (1667-1754), reverendul Thomas Bayes (1702-1761), Johann Friedrich Carl Gauss (1777-1855) şi Siméon Denis Poisson (1781-1840) au contribuit semnificativ la dezvoltarea teoriei probabilităţilor.

Cel care, pe drept cuvânt, trebuie să fie considerat drept fondator al teoriei probabilităților este marchizul Pierre Simon Laplace (1729-1827). În tratatul său

„Theorie Analytique des Probabilites” („Teoria analitică a probabilităţilor”) (1812), Laplace expune în mod riguros propoziţiile de bază ale teoriei probabilităţilor, enunţă şi rezolvă în anumite cazuri teorema limită centrală, fundamentală în teoria erorilor, şi aplică în mod ştiinţific calculul probabilităţilor în demografie, astronomie şi alte domenii.

Şcoala rusă a dat mari matematicieni ca P. L. Cebîşev (1821-1894) şi studenţii săi A. Markov (1856-1922) şi A. M. Liapunov (1857-1918) cu contribuţii importante legate de legea numerelor mari. Germanul Richard von Mises, pe la începutul secolului al XX-lea, a introdus o teorie a probabilităţilor bazată pe definiţia probabilităţii ca frecvenţă relativă. Dar teoria deductivă bazată pe definiţia axiomatică a probabilităţii, aşa cum o studiem în zilele noastre, îi este atribuită în principal lui Andrei Nicolaevici Kolmogorov, care, în anii 1930, împreună cu Paul Lévy, a fundamentat o conexiune strânsă între teoria probabilităţilor şi teoria matematică a mulţimilor şi a funcţiilor de o variabilă reală. Se cuvine menţionat totuşi că matematicianul francez Émile Borel (1871-1956) ajunsese la aceste idei anterior [6, pp. 1-2].

Problemele cavalerului de Méré

Pe la mijlocul anilor 1600, cavalerul de Méré a câștigat sume considerabile de bani din jocurile de noroc. El paria că *din patru aruncări ale unui zar, cel puțin o dată va cădea fața cu 6 puncte.* După părerea lui de Méré, șansa de câștig în jocul cu un zar este de $\frac{4}{6}$, adică $\frac{2}{3}$, deoarece dacă aruncăm un zar, avem 6 rezultate posibile: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și facem 4 încercări. Astfel obținem raportul $\frac{4}{6}$. Însă de Méré gândea greșit.

Pentru rezolvarea acestei probleme vom folosi definiția clasică a probabilității, conform căreia se numeşte probabilitate a unui eveniment aleator A raportul dintre numărul m de rezultate egal posibile favorabile lui A şi numărul total n de rezultate egal posibile ale experimentului [3, p. 78]. Doar că nu vom aplica această formulă pentru evenimentul inițial:

$$A = \{\text{cel puțin o dată va cădea fața cu 6 puncte}\},$$

ci pentru evenimentul contrar, deoarece calcularea probabilității evenimentului A ar presupune calcularea probabilității a 4 evenimente elementare:

$$A_1 = \{\text{o dată va cădea fața cu 6 puncte}\},$$
$$A_2 = \{\text{de 2 ori va cădea fața cu 6 puncte}\},$$
$$A_3 = \{\text{de 3 ori va cădea fața cu 6 puncte}\},$$
$$A_4 = \{\text{de 4 ori va cădea fața cu 6 puncte}\}.$$

Dacă însă pornim de la evenimentul contrar:

$$\bar{A} = \{\text{nici la o aruncare din cele 4 nu va cădea fața cu 6 puncte}\},$$

atunci $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Conform definiției clasice a probabilității, probabilitatea evenimentului $\bar{A}$ va fi: $P(\bar{A}) = \frac{m}{n}$. Mai întâi îl vom determina pe n: dacă un zar „corect” este aruncat de 4 ori, atunci numărul de cazuri posibile (și echiprobabile) este de $6 * 6 * 6 * 6 = 6^4 \Leftrightarrow n = 6^4$. Pentru determinarea lui m observăm că la o aruncare a zarului avem 5 situații în care nu cade fața cu 6 puncte, iar la 4 aruncări ale zarului vom obține $m = 5 * 5 * 5 * 5 = 5^4$ cazuri. Astfel, probabilitatea că cel puțin o dată va cădea fața cu 6 puncte este $P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}518$. Se observă că rezultatul obținut de cavalerul de Méré pentru această problemă diferă de rezultatul corect, dar întrucât și rezultatul corect și cel obținut de cavalerul de Méré, sunt ambele peste 50%, faptul că cavalerul de Méré câștiga mai frecvent decât pierdea, nu i-a trezit dubii în privința corectitudinii raționamentului său.

Cavalerul de Méré a avut atât de mult succes în acest joc, încât, în scurt timp, această veste s-a răspândit și nu se mai găseau doritori să parieze cu el. Atunci el a decis să inventeze un joc nou, dar astfel încât să câștige în continuare.

Dacă se complică regulile jocului anterior și aruncăm două zaruri, se gândea de Méré, avem 36 de rezultate posibile, perechile de puncte: $\{(1{,}1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$ și pentru a avea aceeași șansă de câștig ar trebui aruncată perechea de zaruri de 24 de ori $\left(\frac{4}{6} = \frac{24}{36}\right)$ pentru a obține o dublă (6, 6). Cu toate acestea, cavalerul de Méré a observat că, jucând în modul al doilea (punând pariu că *din 24 de aruncări a două zaruri, cel puțin o dată va obține o dublă de șase puncte*), pierde mai frecvent decât câștigă, ceea ce, după părerea lui, contrazicea regulile matematice. În realitate însă, nu era contrazisă nici o regulă, raționamentul era greșit. Vom rezolva această problemă într-un mod similar cazului precedent.

Avem evenimentul:

$$\bar{A} = \{\text{nici la o aruncare din cele 24 nu va cădea dubla (6,6)}\}$$

Pentru experimentul din această problemă numărul de cazuri posibile (și echiprobabile) este de $n = (6^2)^{24} = 36^{24}$. La o aruncare a perechii de zaruri avem 36 de cazuri posibile și doar într-un caz cade dubla (6,6), prin urmare, în 35 de cazuri avem alt rezultat. La 24 de aruncări ale zarurilor avem $m = 35^{24}$ cazuri în care nu cade dubla (6,6). Astfel, probabilitatea că cel puțin o dată va cădea dubla (6,6) este $P(A) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^4 \approx 0{,}492$.

Întrucât probabilitatea $P(A) = 0{,}492$ este mai mică de 0,5, deducem că, de fapt, practica confirmă rezultatul matematic, problema fiind în metoda de rezolvare, care până la acel moment simplu nu era dezvoltată, iar raționamentul lui de Méré era greșit.

O altă problemă, devenită celebră, a constat în *împărțirea mizei la un joc care este întrerupt* înainte de a fi desemnat un câștigător. La un joc la care participă doi parteneri în condiții egale iese învingător cel care câștigă trei partide. Presupunem că după trei partide jucate jocul se întrerupe, primul jucător având două partide câștigate, iar al doilea numai una. Cum trebuie să fie împărțită miza? Cavalerul de Méré susținea că trebuie să se împartă proporțional cu numărul partidelor câștigate de fiecare jucător, adică cu numerele 2 și 1, însă, nefiind sigur de corectitudinea raționamentului, s-a adresat din nou prietenului matematician.

Și astăzi, dacă întrebăm elevii cum cred ei că e corect să fie împărțită miza, majoritatea răspund la fel, în raportul 2 la 1, analizând, de fapt, rezultatul deja înregistrat și nu șansele de câștig ale jucătorilor.

Teoria probabilităților ne spune că *miza trebuia împărțită direct proporțional cu șansa fiecărui jucător de a câștiga*. Putem calcula aceste șanse de câștig foarte simplu. Să presupunem că jocul ar fi continuat cu încă 2 runde, deoarece probabilitatea că unul din cei 2 jucători va câştiga după aceste 2 runde este de 100%. Acum să estimăm șansele de câştig ale fiecărui jucător. Jucătorul al doilea va lua miza doar dacă câştigă ambele runde, fiindcă una deja a câştigat-o. Șansa de câștig în fiecare rundă pentru fiecare jucător este de $\frac{1}{2}$, deci în 2 runde jucătorul al doilea va câştiga cu şansa de $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Primul jucător însă deja are 2 runde câștigate și, pentru a lua miza, mai trebuie să câștige una. Variantele posibile ar fi: sau câştigă prima rundă sau pierde prima rundă și câştigă runda a doua. Șansa că va câștiga în prima rundă este de $\frac{1}{2}$, iar șansa de a lua miza după runda a doua este de $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Însumând aceste 2 rezultate obținem că şansa de câştig a primului jucător este de $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Aşa deci, şansa că va lua miza primul jucător este de 3 ori mai mare decât şansa că miza o va lua ce-l de-al doilea jucător, şi din acest motiv miza trebuie împărțită proporțional cu numerele 3 și 1 [8, pp. 15-22].

Trebuie menționat faptul că aceste probleme, aparent nesemnificative, dar care au dus la apariția uneia din cele mai interesante și mai profunde teorii, astăzi, ar putea fi rezolvate de către elevii de liceu fără mari dificultăți, fiindcă calculele care au dus la rezultat nu sunt complicate și pot fi înțelese de elevi.

Analiza Curriculumului și a manualelor școlare

Analizând Curriculumul național la matematică pentru învățământul gimnazial și cel liceal, observăm că elemente de teorie a probabilităților și statistică matematică se studiază în clasele a VI-a, a IX-a și a XII-a (la toate profilurile). În clasa a VI-a elevii sunt familiarizați cu noțiunea de eveniment aleator, nu se definește conceptul de probabilitate, dar se discută despre șansele de realizare ale unui eveniment aleator. În clasa a IX-a deja se formulează definiția clasică a probabilității și se propun spre rezolvare probleme în care numărarea cazurilor nu necesită cunoașterea elementelor de combinatorică. În treapta liceală, mai întâi se studiază elementele de combinatorică, necesare în rezolvarea problemelor de numărare, iar apoi se aplică regulile și principiile de bază ale combinatoricii la rezolvarea problemelor de probabilitate. În ciclul liceal, elevii sunt familiarizați cu definiția axiomatică a probabilității și cu noțiunea de variabilă aleatoare.

Concluzie

Punerea în discuție cu elevii a elementelor din istoria dezvoltării matematicii contribuie la trezirea și creșterea interesului acestora pentru studiul disciplinei. Unele situații, probleme, paradoxuri și dileme cu care s-a confruntat omenirea de-a lungul istoriei pot fi și trebuie discutate cu elevii în cadrul orelor, fiindcă aceste discuții i-ar putea convinge pe elevi că:

1. unele probleme care au favorizat apariția conceptului de probabilitate sunt pe puterile lor, iar calculele care au dus la rezultatul corect sunt foarte simple;
2. multe concepte-cheie, de fapt, au apărut în urma rezolvării unor situații și probleme banale;

3. conceptul studiat este important și poate fi utilizat nu doar la rezolvarea problemelor din manualul de matematică, dar și în unele situații reale cu care avem de a face în fiecare zi;
4. drumul pe care l-a parcurs acest concept până a ajunge în manualul școlar a fost unul lung, dar interesant.

Bibliografie:

1. ACHIRI, I., BRAICOV, A., ŞPUNTENCO, O. *Matematică: Manual pentru clasa a VI-a*. Chişinău: Prut Internaţional, 2020. 244 p. ISBN 978-9975-54-517-4.
2. ACHIRI, I., BRAICOV, A., ŞPUNTENCO, O. *Matematică: Manual pentru clasa a IX-a. Ediție revizuită și completată*. Chişinău: Prut Internaţional, 2016. 228 p. ISBN 978-9975-54-255-5.
3. ACHIRI, I., CIOBANU, V., EFROS, M. et al. *Matematică: Manual pentru clasa a XII-a*. Chişinău: Prut Internaţional, 2017. 264 p. ISBN 978-9975-54-320-0.
4. BARGAGLIOTTI, A., FRANKLIN, C., PECK, R. et al. *Pre-K–12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II (GAISE II)* [online] [citat 15.03.2021]. Disponibil: https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEIIPreK-12_Full.pdf
5. *Curriculum național. Disciplina Matematică. Clasele a X-a – a XII-a*. Ministerul Educaţiei, Culturii și Cercetării al Republicii Moldova. Chişinău: Lyceum, 2019.
6. STERIAN, C. E., ALECU, A. Scurt istoric al teoriei probabilităţii. In: *Teoria informației și a codării* [online] [citat 15.03.2021]. Disponibil: http://tet.pub.ro/pages/Tti/tic_cap_1.pdf
7. ПУЧКОВ, Н. П. *Теория вероятностей и математическая статистика в системе политехнического образования: учебное пособие*. Тамбов: Тамб. гос. техн. ун-та, 2017. 80 с. ISBN 978-5-8265-1736-9.
8. СЕКЕЙ, Г., *Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике*. Москва: Мир, 1990. 240 с. ISBN 5-03-001293-1.