APLICAREA DERIVATELOR LA REZOLVAREA UNOR PROBLEME DE ALGEBRĂ

Veronica GUȘAN, *studentă,*
Facultatea de Științe Reale, Economice și ale Mediului,
Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălți
Conducător științific: **Natalia GAȘIȚOI,** *dr., conf. univ.*

Abstract: *This article presents some specific problems in algebra, the solving of which becomes very simple due to the use of derivatives. In general, derivatives are used in mathematical analysis for the function study. If we consider the equality / inequality studied as a function, then solving some or demonstrating others is reduced to studying the function considered. In this sense, Lagrange's theorem, Rolle's theorem etc. come to help us.*

Keywords: *derivatives, intervals of monotony, convexity, concavity, extreme points, critical points.*

Ce este derivata?

Fie$f: D \to \mathbb{R}$ o funcție continuă de o variabilă reală definită în vecinătatea unui punctx_0 din interiorul mulțimii D. Fie $P \epsilon G_f$, $P\left(x_0, f(x_0)\right)$. Fixăm un punct $Q \epsilon G_f$ din apropierea punctului P și fie că $Q\left(x, f(x)\right)$. Ducem dreapta PQ care va uni punctele fixate pe graficul funcției. Dreapta PQ este o *secantă* a graficului funcției f (Figura 1). Notăm:

$$\Delta x = x - x_0, \Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$$

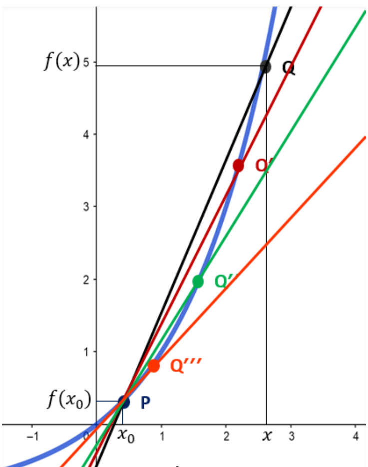

Fig. 1

Aproximarea tangentei prin secanta PQ nu redă atât de bine forma graficului funcției, din care motiv mai fixăm un punct Q′pe grafic și ducem secanta PQ'. În acest caz, Δx și $\Delta f(x)$ își micșorează valorile.

Observăm că această aproximare este mai bună, dar se poate și mai exact, de aceea mai fixăm un alt punct Q'', mai aproape de punctul P, de-a lungul graficului funcției f, și ducem secanta prin acest punct. Respectiv, dacă Δx tinde la 0, atunci, conform datelor inițiale despre funcție, și anume continuitatea acesteia, rezultă că și $\Delta f(x)$ tinde la 0, cu alte cuvinte, punctul Q' se va apropia nelimitat de punctul P.

Tangenta la graficul funcției f în punctul $P \epsilon G_f$ reprezintă poziția limită a secantei PQ atunci când punctul Q tinde la P de-a lungul curbei G_f atât din stânga cât și din dreapta.

Astfel:

$$k_{tg} = \lim_{\substack{Q \to P \\ Q \in G_f}} k_{PQ} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă există și este finită limita raportului dintre creșterea funcției f și creșterea argumentului

$\Delta x = x - x_0$, atunci această limită este *derivata* funcției f în punctul x_0.

Rolul derivatelor în studiul funcțiilor

În analiza matematică derivata este utilizată la:

1. determinarea punctelor critice;
2. determinarea intervalelor de monotonie;
3. determinarea punctelor de extrem;
4. determinarea intervalelor de concavitate și convexitate;
5. determinarea punctelor de inflexiune;
6. schițarea graficului funcției.

Problema 1. Fie $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ o funcție definită de relația $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Să se determine intervalele de concavitate și convexitate ale acestei funcții.

Rezolvare: Pentru a determina intervalele de convexitate și convexitate vom calcula $f''(x)$ și vom rezolva ecuația $f''(x) = 0$.

$$D(f) = \mathbb{R}^*$$

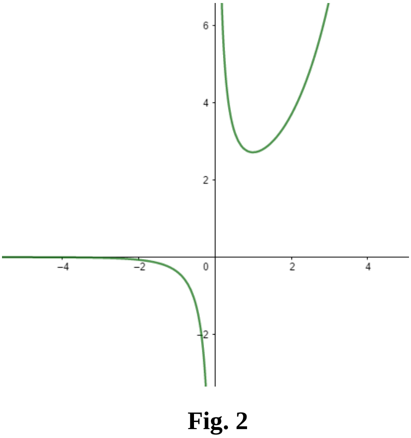

Fig. 2

Pentru a calcula derivata a doua, mai întâi calculăm derivata de ordinul I:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{e^x(x-1)}{x^2};$$

Apoi calculăm derivata de ordinul II:

$$f''(x) = \left(\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right)' = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}.$$

Rezolvăm ecuația $f''(x) = 0$.

$$\frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} e^x = 0 \\ x^2 - 2x + 2 = 0 \end{array}\right. \\ x^3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in \emptyset \\ x \in \emptyset \end{array}\right. \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Deci nu există puncte critice în raport cu derivata de ordinal II.

Aflăm semnele derivatei de ordinul II pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, +\infty)$.Pe $(-\infty, 0)$ $f''(x) < 0$, deci $f(x)$ este concavă și pe $(0, +\infty)$ $f''(x) > 0$, deci $f(x)$ este convexă.Schițăm graficul funcției (Figura 2).

Derivatele în algebră

Problema 2. Fie $a,\ b \in \mathbb{R}$ pentru care este satisfăcută relația $e \le a < b$. De demonstrat că $a^b > b^a$.

Rezolvare: Studiem funcția $f(x) = x - a\log_a x,\ \ x \in [a, b]$. Funcția este definită și diferențiabilă pe $[a, b]$. Calculăm derivata funcției:

$$f'(x) = 1 - \frac{a}{x \ln a}$$

Conform condițiilor problemei $x \ge a$și $a \ge e\ \Rightarrow \ln a \ge 1\ \Rightarrow \frac{a}{x\ln a} \le 1$. În așa mod:

$$f'(x) = 1 - \frac{a}{x\ln a} \ge 0\ \Rightarrow f \nearrow pe\ [a, b].$$

Dar atunci$f(a) < f(b)$. Calculăm valorile funcției f în punctele a și b:

$f(a) = a - a\log_a a = a - a = 0, f(b) = b - a\log_a b = b - \log_a b^a$

Raportând ultimele 3 relații, obținem:

$$0 < b - \log_a b^a \Rightarrow b > \log_a b^a\ \ \Rightarrow \log_a a^b > \log_a b^a \Rightarrow a^b > b^a.$$

Problema 3. Să se arate că $\ln(x + 1) \le x$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$.

Rezolvare: Realizăm o transformare elementară: $\ln(x + 1) \le x \Leftrightarrow \ln(x + 1) - x \le 0$. Fie funcția $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x + 1) - x$. Avem de demonstrat că $f(x) \le 0$.Funcția f este derivabilă deoarece aceasta este compusa unor funcții elementare derivabile. Deci îi putem calcula derivata:

$$f'(x) = (\ln(x + 1) - x)' = \frac{1}{x + 1} - 1 = \frac{-x}{x + 1}$$

Domeniul de definiție al derivatei este la fel $(-1, +\infty)$.

$$f'(x) = 0\ \Leftrightarrow\ \frac{-x}{x + 1} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Calculăm $f(0) = \ln(0 + 1) - 0 = 0$. Aflăm semnele pe intervalele $(-1, 0]$ și $[0, +\infty)$.

Pe $(-1, 0] f'(x) > 0$, deci funcția crește, pe $[0, +\infty) f'(x) < 0$, deci funcția descrește. Rezultă că punctul $x = 0$ este un punct de maxim global. Adică: $f(x) \le f(0)\ \forall x \in (-1, +\infty)$, ceea ce este echivalent cu $\ln(x + 1) \le x\ \forall x \in (-1, +\infty)$.

Problema 4. Să se demonstreze că ecuația $3x^5 - 25x^3 + 60x + 15 = 0$ are cel puțin o soluție reală.

Rezolvare: Studiem funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 15$ și îi aflăm intervalele de monotonie. Pentru aceasta, mai întâi, calculăm derivata funcției:

$$f'(x) = 15x^4 - 75x^2 + 60 = 15(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

Rezolvăm ecuația:$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Aflăm semnele derivatei pe fiecare interval obținut și limitele la capetele domeniului de definiție:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad f(-2) < 0 \; f(-1) < 0 \; f(1) > 0 f(2) > 0 \; \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Alternarea de semne am obținut-o doar la capetele intervalului $[-1, 1]$. Ne amintim despre una din proprietățile funcțiilor continue pe un interval închis și mărginit care ne spune că: *dacă o funcție continuă pe un interval închis și mărginit* $[a, b]$ *ia valori de semne opuse la capetele intervalului, adică dacă* $f(b) * f(a) < 0$, *atunci există cel puțin un punct* $x_0 \in (a, b)$ *a.î.* $f(x_0) = 0$. [1]

Funcția $f(x)$ este continuă pe intervalul $[-1,1]$ și ia valori de semne opuse doar la capetele acestuisegment, deci pe intervalul$(-1,1)\exists f(x_0) = 0$, adică există cel puțin o soluție reală a ecuației

$$3x^5 - 25x^3 + 60x + 15 = 0$$

situată pe acest interval.

Problema 5. Fie $0 < c < \frac{1}{2}$. De demonstrat că $2c + \frac{1}{c^2} > 5$.

Rezolvare:Să analizăm funcția ajutătoare$f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ pe intervalul $\left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Îi calculăm derivata:

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3}(x^3 - 1)$$

Observăm că $f'(x) < 0$ pentru $0 < x < \frac{1}{2}$. Respectiv, pe intervalul $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ funcția descrește, adică pentru $0 < c < \frac{1}{2}$, $f(c) > f\left(\frac{1}{2}\right)$. Dar $f(c) = 2c + \frac{1}{c^2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 5$, de unde rezultă că inegalitatea $2c + \frac{1}{c^2} > 5$ este adevărată.

Problema 6. De demonstrat că $\frac{b-a}{b} \le \ln\frac{b}{a} \le \frac{b-a}{a}$ în condiția că $0 < a \le b$.

Rezolvare: Pentru rezolvarea acestei probleme să studiem funcția logaritmică $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Această funcție este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b), deci îi putem aplica teorema lui Lagrange pe segmentul $[a, b]$, conform căreia, $\exists c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Respectiv:

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = \frac{1}{c}, \text{ deoarece } f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Aplicând proprietățile logaritmilor obținem că:

$$\frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a} = \frac{1}{c} \Longrightarrow \ln\frac{b}{a} = \frac{1}{c}(b-a).$$

Observăm că partea dreaptă a acestei egalități ia valoarea minimă pentru $c = b$ și valoarea maximă pentru $c = a$, de unde și obținem inegaliatea ce trebuia demonstrată:

$$\frac{b-a}{b} \le \ln\frac{b}{a} \le \frac{b-a}{a}.$$

Problema 7. De demonstrat că pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ are loc inegalitatea $\sin x + \operatorname{tg} x \ge 2x$.

Rezolvare: Introducem funcția $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x - 2x$ și o studiem la monotonie. Calculăm derivata acestei funcții:

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{(\cos x)^2} - 2 = \frac{(\cos x)^3 - 2(\cos x)^2 + 1}{(\cos x)^2}$$

Determinăm punctele critice în raport cu derivata de ordinul I:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{(\cos x)^3 - 2(\cos x)^2 + 1}{(\cos x)^2} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} (\cos x)^3 - 2(\cos x)^2 + 1 = 0 \\ (\cos x)^2 \neq 0 \end{cases}$$

Ca să ne fie mai ușor, facem substituția $\cos x = t$ și aflăm rădăcinile ecuației:

$$t^3 - 2t^2 + 1 = 0 \Longrightarrow (t-1)(t^2 - t - 1) = 0 \Longrightarrow t_1 = 1$$

Rezolvând ecuația $t^2 - t - 1 = 0$ obținem că $\Delta = 5$ și $t_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, t_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Știind că $|t| \leq 1$, obținem că $t_1, t_3 \in DVA$, iar $t_2 \notin DVA$, fiindcă $|t_1| = 1, |t_2| > 1$și $|t_3| < 1$.

Revenind la variabila x, avem următoarele:

Dacă $\mathrm{t} = 1 \Longrightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. În intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ se conține doar punctul $x = 0$. Dacă $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \cos x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, adică nu sunt rădăcini pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Prin urmare, derivata funcției f păstrează semnul constant pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Calculăm $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2}$, deci pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ funcția $f'(x)$este pozitivă, deci funcția $f(x)$este crescătoare. Deoarece $f(0) = \sin 0 + \operatorname{tg} 0 - 2 * 0 = 0$ și valorile funcției cresc pe acest interval este evident faptul că funcția $f(x)$ este pozitivă, adică $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Concluzii. Există un șir de probleme, în rezolvarea cărora metodele specifice algebrei nu sunt eficiente, însă, prin utilizarea metodelor analizei matematice, se reduce considerabil însuși procesul de rezolvare, ajungându-se la rezultat mult mai rapid.

Bibliografie:

1. PROCOPIUC, GH. *Analiză matematică și ecuații diferențiale* [on-line]. Iași, 2007, 49 p. [citat 12 aprilie 2019]. Disponibil: http://www.faculty.ro/gheorghe-procopiuc-analiza-matematica-si-ecuatii-diferentiale_l27_p0.html
2. БАЛК, М. Б. Применение производной к выяснению истинности неравенств. В: *Математика в школе*. Ed: Педагогика, 1975, nr. 6, p. 47
3. МАКАРЫЧЕВА, О.О. *Использование производной в школьных уравнениях и неравенствах*. Sankt Petersburg, 1994.