CZU 519

OPTIMIZAREA METODELOR NUMERICE, APLICATE LA INTERPOLAREA FUNCȚIILOR

Vitalie ȚÎCĂU,
lector universitar,
Universitatea de Stat „Alecu Russo”, Bălți

Abstract *The paper deals with interpolating functions based on uniform and non-uniform structures. Functions are either discreet or rather complicated. In the literature, the calculation formulas of the interpolation polynomial Newton, Gauss, Stirling, Bessel and Heverette in the equidistant nodes are specified. But these formulas are based on the application of a recurrent formula for calculating the value of the polynomial for any point investigated. Thus, many of the calculations are repeated. In order to optimize the work, the paper investigated the possibility of determining the coefficients of the Newton interpolation polynomials in normal form without performing repetitions. The paper examines the following aspects:*

- *description of numerical methods of interpolation of functions;*
- *the theoretical determination of the coefficients of the formulas in the definition of the interpolation polynomials for a uniform discrete network for the concrete number of nodes;*
- *defining the interpolation polymorph formulas by one or two parameters based on the determined coefficients;*
- *a programming the formulas defined in the interpolation of functions in discrete or continuous mode.*

For each variant used, examples of application are presented.

Consideraţii generale de interpolare a funcţiilor. Interpolarea este o metodă de aproximare, care permite obţinerea unei valori $\varphi(x)$ destul de apropiate de valoarea necunoscută $f(x)$ a funcţiei f în punctul $x \in [a, b]$, diferit de nodurile x_i. Interpolarea determină o funcţie φ cu o expresie concretă, care aproximează funcţia f, cunoscută în mod discret fără a avea expresia ei analitică [1]. Problema interpolării constă în a uni valorile funcţiei în noduri printr-o curbă astfel încât valoarea obţinută într-un punct diferit de noduri să fie aproximativ egală cu precizia indicată, cu valoarea exactă necunoscută.

Interpolarea se aplică şi în cazul când expresia funcţiei $f(x)$ este cunoscută, însă e prea complicată. Deci, funcţia de interpolare $\varphi(x)$, de obicei, reprezintă o combinaţie liniară de polinoame, funcţii exponenţiale sau trigonometrice.

Polinoamele de interpolare Lagrange şi Newton. Polinomul de interpolare Lagrange are forma [1]:

$$P_n = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \tag{1}$$

unde $Li_(x)$sînt combinaţii liniare de funcţii 1, x, x^2, $\ldots$, x_n, adică $L_i(x)$ este un polinom de grad mai mic sau egal cu n. Se calculează conform relației:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i0 - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} \tag{2}$$

Polinoamele Lagrange au următoarele proprietăţi [2]:

1. $\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1;$

2. Polinomul $L_i(x)$ este invariant faţă de o transformare liniară a variabilei.

Proprietatea 2 permite de a scrie o formulă mai simplă a polinomului de interpolare al lui Lagrange în cazul nodurilor echidistante. Se trece la variabila t după formula $x = x_0 + th$, unde h este pasul.

O altă metodă de interpolare este metoda lui Newton în diferenţe divizate. Se aplică noţiunea de diferenţe divizate de ordinul n, introduce prin expresia de forma [3]:

$$f[x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n] = \frac{f[x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_{n-1}] - f[x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n]}{x_0 - x_n}. \tag{3}$$

Polinomul de interpolare lui Newton are următoarea formă:

$$\begin{gathered} P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0,\, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0,\, x_1,\, x - 2] + \ldots + \\ +(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})f[x_0,\, \ldots,\, x_n], \end{gathered} \tag{4}$$

unde $f[x_0, \ldots, x_n]$ sunt diferenţe divizate.

Avantajul formulei lui Newton constă în aceea că la adăugarea nodurilor termenii deja calculaţi nu se schimbă.

Prima și a doua formule ale polinomului de interpolare Newton. Formulele în diferenţe finite se obţin în cazul nodurilor echidistante, adică pentru $x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n$ are loc egalitatea:

$$x_i - x_{i\check{}1} = h,\, i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n. \tag{5}$$

Ţinând cont de eroarea interpolării, numerotăm nodurile şi le folosim într-o anumită ordine. Se numesc diferenţe finite de ordinul r expresiile:

$$\Delta^r y_i = \Delta^{r-1} y_{i+1} - \Delta^{r-1} y_i \tag{6}$$

pentru orice valori ale lui r. Aceste diferenţe pot fi calculate în mod recurent.

Proprietatea 1. Diferenţa finită de ordinul $n+1$ de la un polinom $P_n(x)$ de gradul n este nulă.

Proprietate 2. Diferenţa finită de orice ordin se exprimă şi prin valorile funcţiei în noduri.

Prima și a doua formule ale polinomului de interpolare Newton se obţin din formula polinomului de interpolare al lui Newton (4), înlocuind diferenţele divizate prin cele finite. Prima formulă a lui Newton:

$$P_n(x_0 + ht) = y_0 + \frac{1}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \tag{7}$$

Ea este mai bine adaptată la începutul tabelului. Se observă, că se lucrează cu linia de sus.

A doua formulă a lui Newton:

$$P_n(x_0 + ht) = y_n + \frac{1}{1!}\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \tag{8}$$

Ea este mai bine adaptată la sfârşitul tabelului. În acest caz, se lucrează cu linia de jos.

Determinarea coeficienţilor polinoamelor de interpolare Newton în formă normală. Fie prima formulă a polinomului de interpolare Newton (7). Notăm:

$$k_0 = y_0,\, k_1 = \frac{\Delta y_0}{1!},\, k_2 = \frac{\Delta^2 y_0)}{2!},\, \ldots,\, k_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!}. \tag{9}$$

Pentru a obţine *formula polinomului de interpolare Newton* în forma normală:

$$P_n(x_0 + ht) = a_0 + a_1 t + a_2 t_2 + \ldots + a_n t^n. \tag{10}$$

trebuie de determinat coeficienţii $a_0,\, a_1,\, a_2, \ldots,\, a_n$ de pe lângă parametrul t.

Fie $n = 1$. Nodurile sînt x_0 şi x_1. Conform formulei (7) se obţine:

$$P_1(x_0+ht) = y0_+t\Delta y_0.$$

Astfel, coeficienţii de aplicare a formulei polinomului de interpolare Newton de forma (10) se calculează după formulele:

$$a_0 = k_0;\ a_1 = k_1. \tag{11}$$

Fie $n = 2$. Nodurile sînt x_0, x_1 şi x_2. Conform formulei (7) se obţine:

$$P_2(x_0+ht) = k_0 + tk_1 + t(t-1)k2.$$

Efectuând calculele necesare:$P_2(x_0+ht) = k_0 + t(k_1 - k_2) + t_2k_2$, coeficienţii de aplicare a formulei polinomului de interpolare Newton de forma (10) se calculează după formulele:

$$a_0 = k_0;\ a_1 = k_1 - k_2;\ a_2 = k_2. \tag{12}$$

În mod similar:

- pentru $n = 3$ cu nodurile x_0, x_1, x_2 şi $x_3$se obţine:

$$a_0 = k_0;\ a_1 = k_1 - k_2 + 2k_3;\ a_2 = k_2 - 3k_3;\ a_3 = k_3. \tag{13}$$

- pentru $n = 4$ cu nodurile x_0, x_1, x_2, x_3 şi x_4 se obţine:

$$a_0 = k_0;\ a_1 = k_1 - k_2 + 2k_3 - 6k_4;\ a_2 = k_2 - 3k_3 + 11k_4;\ a_3 = k_3 - 6k_4;\ a_4 = k_4. \tag{14}$$

- pentru $n = 5$ cu nodurile x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 şix_5 se obţine:

$$\begin{gathered} a_0 = k_0;\ a_1 = k_1 - k_2 + 2k_3 - 6k_4 + 20k_5;\ a_2 = k_2 - 3k_3 + 11k_4 - 49k_5; \\ a_3 = k_3 - 6k_4 + 35k_5;\ a_4 = k_4 - 10k_5;\ a5_= k_5. \end{gathered} \tag{15}$$

- pentru $n = 6$ cu nodurile x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 şi x_6 se obţine:

$$\begin{gathered} a_0 = k_0;\ a1_= k_1 - k_2 + 2k_3 - 6k_4 + 20k_5 - 100k_6;\ a_2 = k_2 - 3k_3 + 11k_4 - 49k_5 + 265k_6; \\ a_3 = k_3 - 6k_4 + 35k_5 - 224k_6;\ a_4 = k_4 - 10k_5 + 85k_6; a_5 = k_5 - 15k_6;\ a_6 = k_6. \end{gathered} \tag{16}$$

Fie formula a doua a polinomului de interpolare Newton (8). Notăm:

$$k_0 = y_n,\ k_1 = \Delta y_{n-1},\ k_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!},\ \ldots,\ k_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!}. \tag{17}$$

Efectuând aceleași operații ca și în cazul aplicării primei formule a polinomului de interpolare:

- pentru $n = 1$ cu nodurile x_0 şi x_1 se obţine:

$$a_0 = k_0;\ a_1 = k_1. \tag{18}$$

- pentru $n = 2$ cu nodurile x_0, x_1 şi x_2 se obţine:

$$a_0 = k_0;\ a_1 = k_1 + k_2;\ a_2 = k_2. \tag{19}$$

- pentru $n = 3$ cu nodurile x_0, x_1, x_2 şi x_3 se obţine:

$$a_0 = k_0;\ a_1 = k_1 + k_2 + 2k_3;\ a_2 = k_2 + 3k_3;\ a_3 = k_3. \tag{20}$$

- pentru $n = 4$ cu nodurile x_0, x_1, x_2, x_3 şi x_4 se obţine:

$$a_0 = k_0;\ a_1 = k_1 + k_2 + 2k_3 + 6k_4;\ a_2 = k_2 + 3k_3 + 11k_4;\ a_3 = k_3 + 6k_4;\ a_4 = k_4. \tag{21}$$

- pentru $n = 5$ cu nodurile x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 şi x_5 se obţine:

$$\begin{gathered} a_0 = k_0;\ a_1 = k_1 + k_2 + 2k_3 + 6k_4 + 20k_5;\ a_2 = k_2 + 3k_3 + 11k_4 + 49k_5; \\ a_3 = k_3 + 6k_4 + 35k_5;\ a_4 = k_4 + 10k_5;\ a_5 = k_5. \end{gathered} \tag{22}$$

- pentru $n = 6$ cu nodurile x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 şi x_6 se obţine:

$$a_0 = k_0;\ a_1 = k_1 + k_2 + 2k_3 + 6k_4 + 20k_5 + 100k_6;$$
$$a_2 = k_2 + 3k_3 + 11k_4 + 49k_5 + 265k_6;\ a_3 = k_3 + 6k_4 + 35k_5 + 224k_6; \tag{23}$$
$$a_4 = k_4 + 10k_5 + 85k_6;\ a_5 = k_5 + 15k_6;\ a_6 = k_6.$$

Concluzii:

- Aplicarea interpolării permite determinarea valorilor funcţiei necunoscute în punctele diferite de noduri;
- Creşterea numărului nodurilor de interpolare are efecte secundare defavorabile, deoarece atrage după sine creşterea ordinului restricţiilor. De aceea se recomandă de utilizat maximum 5-8 noduri, ceea ce şi s-a efectuat în această lucrare. Se pot construi formule şi pentru mai multe noduri, însă eroare de calcul creşte exponenţial odată cu creşterea gradului polinomului;
- Numărul de calcule la aplicarea formulelor în formă normală este considerabil mai mic ca la aplicarea formulelor polinoamelor de interpolare în caz general;
- Eroarea de interpolare este de ordinul h^7 pentru 6 noduri, h^7 pentru 7 noduri, $h^{-\smile}h^8$ pentru 8 noduri, şi h^8 – pentru 10 noduri, în caz, că pasul h < 0.5. Pentru h > 0.5 apare o instabilitate la aproximarea funcţiilor.

BIBLIOGRAFIE

1. SECRIERU, G.; SECRIERU, I. Analiza numerică. Chişinău: Ştiinţa, 1985, 206 p.
2. BRĂTIANU, C.; BOSTAN, V.; COJOCIA, L.; NEGREANU, G. Metode numerice. Bucureşti: Editura tehnică, 1996, 207 p.
3. BERBENTE, C.; MITRAN, S.; ZANCU, S. Metode numerice. Bucureşti, Editura Tehnică, 1998, 315 p.
4. ДЕМИДОВИЧ Б.П., МАРОН И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966, 663 с.
5. TRÎMBIŢAŞ, R.-T. Analiză numerică. O introducere bazată pe MATLAB. Cluj-Napoca: Presa Universitară Clujeană, 2005, 446 p.