CZU 004

ANALIZA METODELOR DE FACTORIZARE LA DETERMINAREA VALORILOR PROPRII ALE OPERATORILOR MATRICIALI

Vitalie ŢÎCĂU, *Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălţi, Republica Moldova*

Rezumat: La dezvoltarea competenţelor studenţilor o importanţă deosebită o are dezvoltarea competenţelor de cercetate şi aplicare. Lucrarea de faţă este destinată cercetării şi analizei metodelor de factorizare la determinarea valorilor proprii ale operatorilor matriciali. În literatura de specialitate se descriu pe larg metodele directe de determinare a valorilor proprii prin desfăşurarea polinomului caracteristic. Însă pentru metodele de factorizare sînt indicate doar unele formule de calcul.

În lucrare sînt prezentate 2 metode de factorizare, aplicate la determinarea valorilor vectori proprii ale unei matrice: metoda Rutishauser şi QR. Pentru început se dau noţiunile de vectori şi valori proprii, apoi se descriu algoritmii metodelor Rutishauser şi QR propriu-zise. Ideea metodei Rutishauser constă în construirea unui şir de matrice similare, astfel ca la limită, matricea obţinută să fie superior triunghiulară, avînd pe diagonala principală valorile proprii căutate. Metoda QR constituie o variantă mai eficientă a metodei Rutishauser, bazată pe factorizarea matricelor.

Cuvinte- cheie: *metode de factorizare, valori proprii, operatori matriciali.*

Abstract: Developing students’ research and application competences is of great importance. This paper is devoted to the research and analysis of factorization methods to determine the eigenvalue matrix operators. Reference literature largely describes direct methods of determining their values by developing the characteristic polynomial. However, only some calculus formulas are recommended for factorization methods. The work presents two factorization methods, applied in determining the values of the eigenvectors of a matrix: Rutishauser and QR method. To begin with, the concepts of vectors and eigenvalues are given, and then the Rutishauser and QR algorithm methods are described. The idea of the Rutishauser method is to build a string of similar matrixes, so that at the limit, to obtain an upper triangular matrix with the diagonal eigenvalues sought. The QR method is a more efficient variant of the Rutishauser method based on matrix factorization.

Keywords: *factorization methods, eigenvalue, matrix operators.*

La aplicarea unor metode clasice de determinare a valorilor proprii ale operatorilor matriciali, cum ar fi metodele Krîlov, Danilevski sau Leverrier, pentru început este necesar de a determina polinomul caracteristic. Apoi, rezolvînd ecuaţia caracteristică, se obţin valorile proprii căutate. Aplicînd metodele de factorizare, se obţin imediat valorile proprii. Neajunsul aplicării metodelor de factorizare constă în faptul că etapa de factorizare poate fi destul de complicată.

Metoda Rutishauser. Ideea acestei metode constă în construirea unui şir de matrice similare, astfel ca la limită, matricea obţinută să fie superior triunghiulară, avînd pe diagonala principală valorile proprii căutate [Brătianu 1996: 177-178]. Considerăm că matricea iniţială A poate fi factorizată într-o matrice inferior triunghiulară L şi o matrice superior triunghiulară R. Matricea L are elementele diagonale unitare, $l_{ii}=1,\ i=l,2,\dots,n$. Fie $A_1 = A$ primul termen al şirului de matrice similare şi factorizarea:

$$A_1 = L_1R_1$$

Construim cel de-al doilea termen al şirului şi apoi îl factorizăm:

$$A_2 = R_1L_1;$$
$$A_2 = L_2R_2$$

Construim ce1 de-al treilea termen al şirului şi apoi îl factorizăm:

$$A_3 = R_2L_2;$$
$$A_3 = L_3R_3$$

Construim termenii generici ai şirului pe care îi factorizăm:

$$\begin{aligned} A_k &= R_{k-1}L_{k-1}; \\ A_k &= L_kR_k; \\ A_{k+1} &= R_kL_k; \\ A_{k+1} &= L_{k+1}R_{k+1} \end{aligned} \tag{1}$$

Se poate demonstra că:

$$A_{k+1} = L_k^{-1}\cdot A_kL_k = R_k\cdot A_kR_k^{-1} \tag{2}$$

Deci matricea A_{k+1} este similară cu A_k. $k = 1,2,\dots,n$. Notăm cu:

$$L = L_1L_2 ... L_k \text{ şi } R = R_kR_{k-1} ... R_1 \tag{3}$$

Introducem (3) în (2) şi obţinem:

$$A_{k+1} = L^{-1}\cdot AL = R\cdot AR^{-1}. \tag{4}$$

Aceasta demonstrează faptul că fiecare termen al şirului $A_1,A_2,\dots$ reprezintă o matrice similară cu matricea iniţială A, deci, are aceleaşi valori proprii şi aceeaşi vectori proprii cu ea. Deoarece la limită $L_k \to I$, din (2) rezultă că $A_k \to R_k$. Deci, pentru $k \to \infty$, se obţine o matrice A_k similară cu A, dar care este superior triunghiulară.

Metoda expusă este laborioasă şi, datorită factorizărilor succesive, rezultatele obţinute sînt mai puţin precise. Pentru reducerea erorilor de calcul cumulate se recomandă permutarea liniilor şi coloanelor matricei *A,* astfel ca elementele ei diagonale să fie dominante în valoare absolută:

$$|a_{ii}| > |a_{ij}|,\ i \neq j. \tag{5}$$

Metoda QR. Această metodă constituie o variantă mai eficientă a metodei Rutishauser, bazată pe factorizarea matricelor [Berbente et alii 1998: 169-170]. Dacă matricea iniţială A este nesingulară, atunci există descompunerea:

$$A = QR \tag{6}$$

unde Q este o matrice unitară, iar R este o matrice superior triunghiulară. Ideea algoritmului este de a construi un şir de matrice similare $A_1, A_2, \ldots$, astfel ca, la limită, şirul să tindă spre o matrice superior triunghiulară. Dacă matricea iniţială A este oarecare, implementarea acestei metode este laborioasă şi neeficientă, deoarece numărul de operaţii este proporţional cu n^3, unde n este rangul matricei A. Dacă matricea iniţială are o formă specială - forma superioară Hessenberg sau forma tridiagonală - atunci algoritmul QR este proporţional cu n^2 sau chiar cu n, devenind foarte eficient. De aceea, implementarea algoritmului se face practic în doua etape (9, 10):

- Transformarea matricei iniţiale oarecare A într-o matrice specială de tip Hessenberg sau tridiagonală.
- Construirea şirului de matrice similare $A_1, A_2, \ldots$, prin transformări similare ortogonale.

Termenii generici ai şirului de matrice similare se obţin prin transformări similare celor din (1):

$$A_k = Q_k R_k;\ A_{k+1} = R_k Q_k \tag{7}$$

Dacă înmulţim la stînga A_k cu inversa obţinem:

$$Q_k^{-1} A_k = Q_k^{-1} Q_k R_k = R_k \tag{8}$$

Din (8) şi (7) rezultă:

$$A_{k+1} = Q_k^{-1} A_k Q_k \tag{9}$$

ceea ce demonstrează faptul că matricea A_{k+1} este similară cu A_k, avînd aceleaşi valori proprii. Deoarece Q_k este o matrice ortogonală, relaţia (9) devine:

$$A_{k+1} = Q_k^T A_k Q_k \tag{10}$$

Construirea şirului de matrice similare nu impune folosirea exclusivă a matricei superior triunghiulare R_k. Factorizarea matricei A_k se poate face folosind şi o matrice inferior triunghiulară. În acest caz, relaţiile (1) devin:

$$A_k = Q_k L_k;\ A_{k+1} = L_k Q_k \tag{11}$$

iar relaţia (10) se conservă. Dacă matricea iniţială A are valori proprii distincte în valoare absolută $|\lambda_i|$, atunci (11) permite construirea unui şir a cărui limită $A_k\ \{k \to \infty)$ este o matrice inferior triunghiulară, avînd ca elemente diagonale chiar valorile proprii căutate.

Convergenţa acestui algoritm poate fi accelerată dacă se foloseşte procedeul *deplasării originii*. Dacă μ este o constantă oarecare, atunci matricea $(A - \mu I)$ are valorile proprii $\lambda_i - \mu$. Dacă aplicăm transformările (11) noii matrice, obţinem:

$$A_k - \mu_k I = Q_k L_k;$$
$$A_{k+1} = L_k Q_k + \mu_k I = Q_k^T A_k Q_k \tag{12}$$

Convergenţa acestui şir de matrice similare este determinată de raportul:

$$\frac{\lambda_i - \mu_k}{\lambda_j - \mu_k} \tag{13}$$

Alegerea deplasării μ_k se face astfel ca să se maximizeze accelerarea ratei de convergenţă.

Aplicarea metodelor de factorizare. Fie, este necesar de a determina valorile proprii ale matricei:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

În figura 1 este prezentată aplicarea metodei Rutishauer.

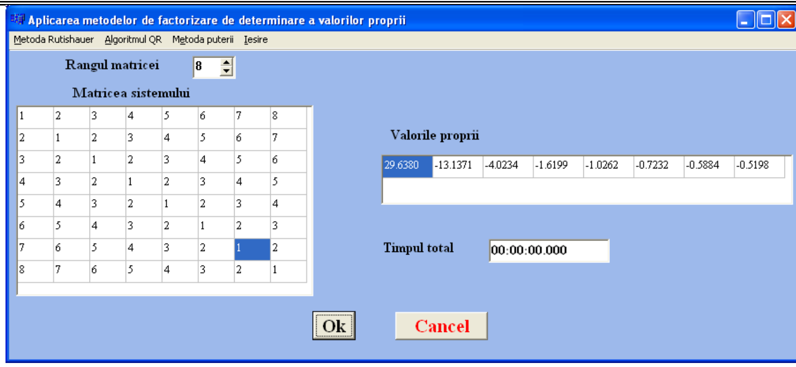

Figura 1. Aplicarea metodei Rutishauer

Aplicînd şi alte metode, se observă că algoritmii metodelor de factorizare converg destul de rapid pentru ordinul matricei destul de mare, dacă matricea este simetrică.

Bibliografie:

1. Brătianu, C., *Metode numerice,* Bucureşti, Editura Tehnică, 1996.
2. Berbente, C.; Mitran, S.; Zancu, S., *Metode numerice,* Bucureşti, Editura Tehnică, 1998.