CZU 629.7(072.3)

# ASPECTE METODOLOGICE ALE PREDARII ELEMENTELOR DE COSMONAUTICĂ ŞI RANDAMENTUL RACHETEI

**Mihail POPA,** *dr.,conf. univ.,*
*Universitatea de Stat „Alecu Russo" din Bălţi*

**Abstract:** This paper presents theoretical and practical aspects of teaching the theory of cosmic flights during physics of high school by eliminating differential and integral calculus.

***Termeni cheie*** : cosmonautică, sateliţi artificiali, rachetă

## 1.Introducere

Predarea elementelor de cosmonautică în cursul preuniversitar de fizică se ciocneşte de anumite dificultăţi. Elevii de la nivelul liceal studiază calculul diferenţial şi integral în ultima clasă de liceu, iar pentru deducerea formulei lui Ţiolkovski, ecuaţiei lui Meşcerskii şi a altor relaţii importante este necesară cunoaşterea operaţiilor de derivare şi integrare la nivelul clasei a X-a.

Articolul respectiv propune un raţionament logic şi o metodă simplă de deducere a formulei lui Ţiolkovski, fără utilizarea calculului diferenţial şi integral. Se analizează evoluţia randamentului rachetei la diferite etape ale mişcării.

## 2.Conţinutul lucrării

Pentru lansarea sateliţilor artificiali ai Pământului şi a navelor cosmice se folosesc rachetele purtătoare. La bordul rachetei purtătoare se află combustibilul şi oxidantul, necesare pentru funcţionarea motorului cu reacţie cu combustibil lichid. Ele constituie o parte considerabilă a masei la start a rachetei $M_0$. Pe măsura funcţionării motorului masa rachetei se micşorează. Viteza maximă pe care poate să o dezvolte racheta în procesul funcţionării motorului depinde de proprietăţile combustibilului, de rezistenţa şi densitatea materialelor utilizate şi de factorului de eficienţă a rachetei, care se obţine prin construcţia raţională a rachetei. Prezintă interes ce energie este necesară pentru lansarea unei rachete?

**Problema**. *În cît timp fierul de călcat consumă aceiaşi energie care ar fi necesară pentru lansarea pe orbită a unui satelit artificial al Pămîntului? Se consideră cunoscute puterea fierului de călcat $P = 1kW$ şi masa acestuia $m = 1kg$.*

**Rezolvare**: Energia cinetică a satelitului ce se miscă pe o orbită circulară [1]

$$W_c \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{m\left(\sqrt{gR}\right)^2}{2} = \frac{mgR}{2}, \qquad (1)$$

unde *v* este prima viteza cosmică, iar *R* – raza Pămîntului. Energia potenţială *mgh* pentru orbite nu prea mari este mult mai mică decît energia cinetică şi poate fi neglijată.

Pe de altă parte, din condiţia problemei, energia satelitului este egală cu cea fierului de călcat

$$W \quad = Pt, \qquad (2)$$

de unde obţinem

$$t = \frac{mgR}{2P} = 3{,}2 * 10^4 c \approx 9h. \qquad (3)$$

Am primit că pentru lansarea pe orbită a satelitului Pămîntului este necesar de cheltuit o energie de circa 9 kWh pentru fiecare kilogram din masa totală a rachetei. De ce atunci pentru realizarea unui zbor cosmic sunt necesare cheltuieli de ordinul unui buget naţional al unei ţări în curs de dezvoltare?

Deoarece racheta în calitate de maşină termică are un randament termic foarte mic, iar energia de 9 kWh este necesară, dar nu este suficientă.

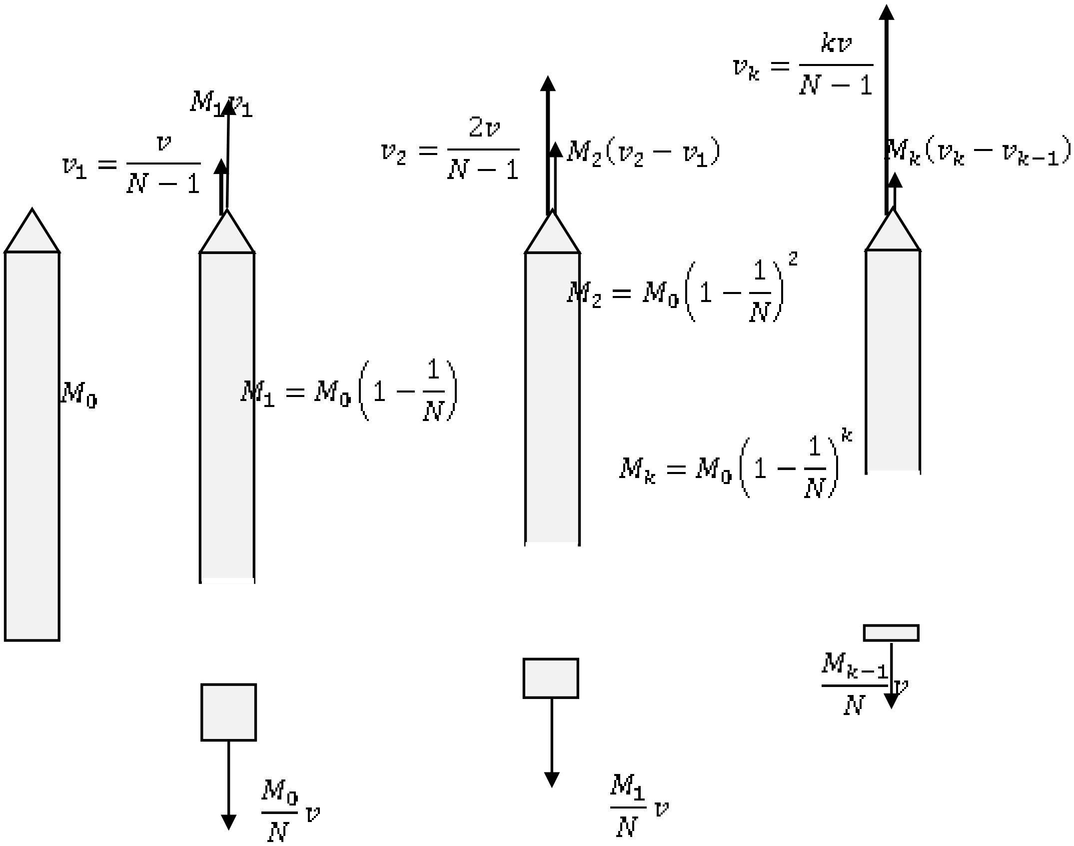
Iniţial vom deduce formula ce exprimă legătura dintre masa şi viteza rachetei, adică vom rezolva *problema lui Ţiolkovskii*. Complexitatea problemei constă în faptul că după start masa rachetei se micşorează odată cu arderea combustibilului, iar aceste fenomene se studiază rezolvînd ecuaţii diferenţiale. Pentru evitarea acestora, vom considera că arderea combustibilului are loc nu continuu, ci în porţii mici. *Ţiolkovski a propus o rachetă cu mai multe trepte (multietajată), care constă din mai multe rachete unite în serie, fiecare din ele avînd motorul său propriu cu combustibilul şi oxidantul necesar.* Să considerăm că de fiecare dată se rupe a $\frac{1}{N}$ -a parte din masa rachetei, ca şi cum din racheta s-ar împuşca cu un proiectil, masă căruia este de *N* ori mai mică decât masa rachetei la momentul respectiv (Fig. 1). Viteza acestui „proiectil" faţă de rachetă se consideră constantă şi o vom numi viteza de curgere. La fiecare „împuşcătură" se respectă legea conservării impulsului. Fie $M_0$ masa iniţială a rachetei, iar viteza iniţială este nulă. Atunci, termenul $\frac{M_0}{N}v$ reprezintă impulsul proiectilului după prima împuşcătură, iar $\left(1-\frac{1}{N}\right)M_0 v_1$ - impulsul respectiv al rachetei. Masa rachetei după prima împuşcătură [1,3,4]

$$M_1 = M_0\left(1-\frac{1}{N}\right), \qquad (4)$$

iar viteza ei

$$v_1 = \frac{v}{N-1}. \qquad (5)$$

După cea de-a două de-a doua „împuşcătură” masa rachetei devine




$$M_2 = M_1\left(1-\frac{1}{N}\right) = M_0\left(1-\frac{1}{N}\right)^2. \qquad (6)$$

**Fig. 1.** *Modificarea masei, vitezei şi impulsului rachetei la „împuşcarea” porţiilor de combustibil din rachetă*

Legea conservării impulsului scrisă în sistemul de referinţă legat de rachetă, ce zboară cu viteza $v_1$ , are forma

$$\frac{M_1}{N}v = M_2(v_2 - v_1)\ , \qquad (7)$$

de unde obţinem

$$v_2 = v_1 + \frac{M_1}{NM_2} v = \frac{2v}{N-1}. \qquad (8)$$

Este uşor de înţeles că după „împuşcătură” de ordinul $k$ viteza rachetei devine

$$v_1 = \frac{kv}{N-1}, \qquad (9)$$

iar masa rămasă a rachetei

$$M_k = M_0 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k. \qquad (10)$$

Pentru a atinge viteza $v_k$ este necesar de efectuat $k = \frac{v_k}{v}(N-1)$ „împuşcături”, iar masa utilă rămasă va fi

$$m = M_k = M_0 \left\{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-1}\right\}^{\frac{v_k}{v}}. \qquad (11)$$

Este adevărat că procesul real decurge continuu, dar nu pe porţii. De aceea, pentru ca mişcarea analizată să fie cît mai apropiată de cea reală, este necesar de ales un număr $N$ cît mai mare de „împuşcături”. Atunci cînd $N \to \infty$ procesul poate fi considerat continuu.

Rezultă că odată cu creşterea lui $N$ termenul $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-1}$ tinde la o limită finită [2]. Această limită este egală cu 0,36788… şi se notează în matematică prin $e^{-1}$, unde e = 2,71828… reprezintă baza logaritmilor naturali.

Astfel, obţinem că masa rachetei care atinge viteza $v_k$ are forma [1, 3, 4]

$$m = M_0 e^{-v/v_k}. \qquad (12)$$

Aceasta este *formula lui Ţiolkovski,* obţinută în anul 1903 de savant rus Konstantin Eduardovici Ţiolkovski, specialist în rachete şi pionier al astronauticii. Din această relaţie rezultă, că racheta poate atinge viteză mai mare decît viteza de curgere a combustibilului, îar masa rămasă a rachetei devine mult mai mică decît cea iniţială.

Dacă, de exemplu, viteza de curgere $v = 2\frac{km}{s}$, atunci la atingerea primei viteze cosmice $v_k = 7{,}9\frac{km}{s}$ masa finală va fi de $e^{3,95} \approx 52$ ori mai mică decît cea iniţială, iar la atingerea celei de-a doua viteză cosmică de $11{,}2\frac{km}{s}$ – de $e^{5,6} \approx 270$ ori mai mică decît cea iniţială. Trebuie menţionat că o parte considerabilă din masa rămasă o constituie corpul rachetei, astfel că greutatea utilă este şi mai mică. Pentru a micşora această masa inutilă se construiesc rachete multietajate. Corpul fiecărei trepte inferioare după arderea combustibilului din ea se desprinde de rachetă.

Formula lui Ţiolkovski poate fi scrisă şi într-o altă formă [3,6,7]:

$$v_k = v * ln\frac{M_0}{m}. \qquad (13)$$

Rezultă că pentru obţinerea unor viteze de mişcare a rachetei $v_k$ mai mari, pentru valorile constante $m$ şi $M_0$, trebuie mărită cît este posibil viteza de curgere. Însă, pentru rachetele ce folosesc energia degajată din reacţiile chimice, adică pentru rachetele chimice, este imposibil de mărit viteza de curgere mai mult decît valoarea limită a fiecărei reacţii. De acest lucru ne putem convinge uşor.

Fie $q$ – capacitarea calorică a combustibilului respectiv, adică energia ce se degajă la arderea 1kg din acest combustibil. Aceasta se cheltuie pentru încălzirea gazelor reziduale şi pentru comunicarea lor a unei energii cinetice. La arderea masei combustibilui $m$ se degajă energia $mq$, însă numai o parte din ea se transformă în energie cinetică a produselor de ardere $\frac{mv^2}{2}$. De aceea, $\frac{v^2}{2} < q$. Dacă introducem noţiunea de *randament al rachetei* $\eta_0$, ca raportul dintre energia utilă şi cea cheltuită, obţinem [5]

$$\frac{mv^2}{2} = \eta_0 mq\ , \qquad (14)$$

de unde

$$v = \sqrt{2\eta_0 q}. \qquad (15)$$

Rezultă că viteza de curgere pentru reacţia chimică respectivă nu poate depăşi viteza maximă de curgere $v_{max} = \sqrt{2q},$ deoarece $\eta_0 < 1.$

Vom precăuta cîteva reacţii chimice şi vom determina pentru fiecare viteza limită de curgere:

1. Arderea acetilenii:

$$2C_2H_2 + 5O_2 = 4CO_2 + 2H_2O + 611\ kcal. \qquad (16)$$

Numărul de kilocalorii din partea dreaptă a reacţiei chimice (16) indică energia ce se degajează la arderea masei egală cu suma cantităţilor de substanţă a combustibilului şi oxidantului. Astfel, la arderea a doi moli de $C_2H_2$ şi a cinci moli de $O_2$ se consumă masa 2*26+5*32=212g. Capacitatea calorică a acestui combustibil

$$q = \frac{611\ kcal}{212g} = 2880\frac{kcal}{kg} = 1{,}2 \times 10^7\frac{m^2}{s^2}, \qquad (17)$$

iar viteza limită de curgere $v_{max} = \sqrt{2q} = 4{,}9\frac{km}{s}$

2. $2H_2 + O_2 = 2H_2O + 115{,}6\ kcal.$ (18)

Analog obţinem $q = 3220\frac{kcal}{kg};\ \ v_{max} = 5{,}2\frac{km}{s}.$

3. $2Al + \frac{3}{2}O_2 = Al_2O_3 + 394\ kcal.$ (19)

Obţinem $q = 3860\frac{kcal}{kg};\ \ v_{max} = 5{,}8\frac{km}{s}.$

4. $Be + \frac{1}{2}O_2 = BeO + 146\ kcal.$ (20)

Analog obţinem $q = 5840\frac{kcal}{kg}$; $v_{max} = 7\frac{km}{s}$.

Observăm că din reacţiile analizate cea mai mare viteză de curgere se obţine la arderea beriliului metalic, însă utilizarea practică a acestei reacţii are dificultatea că atît beriliul metalic, cît şi compuşii acestuia sunt foarte toxici.

Să precăutăm acum randamentul general al rachetei, adică raportul dintre energia utilă $\frac{mv_k^2}{2}$ şi energia totală consumată $qM_0$ (aici am luat masa iniţială a combustibilului, deoarece aceasta are cea mai mare pondere în masa totală rachetei). Obţinem

$$\eta = \frac{mv_k^2}{2M_0 q} = \frac{v_k^2}{2q} e^{-v/v_k}. \quad (21)$$

Dacă ridicăm la pătrat relaţia (15) şi substituind valoarea obţinută a lui $q$ în (21), obţinem

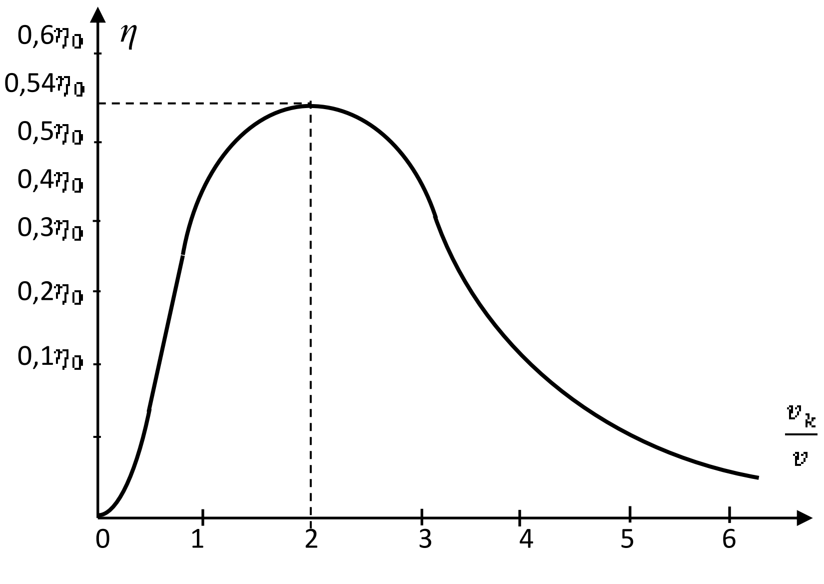



**Fig. 2.** *Graficul dependenţei* $\eta\left(\frac{v_k}{v}\right)$

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{v_k}{v}\right)^2 e^{-\frac{v_k}{v}}. \quad (22)$$

Graficul dependenţei $\eta\left(\frac{v_k}{v}\right)$ este prezentat în Fig. 2 [4].

Astfel, numai o parte din energia consumată, egală cu $\eta M_0 q$, se transformă în energia cinetică a rachetei. Apare întrebarea, unde a dispărut partea rămasă a energiei consumate, deoarece în căldură, la arderea combustibilului, se transformă doar partea $(1-\eta_0)qM_0$. Calculăm energia rămasă:

$$(1-\eta)qM_0-(1-\eta_0)qM_0=(\eta_0-\eta)qM_0=$$
$$=\eta_0\left[1-\left(\frac{v_k}{v}\right)^2 e^{-v_k v}\right]qM_0. \qquad (23)$$

Aceasta reprezintă energia cinetică a gazelor reziduale a rachetei (în sistemul de referinţă legat cu Pămîntul), care în final trece în căldură, încălzind atmosfera.

Astfel, observăm că la atingerea vitezei rachetare, adică a unei viteze de curgere mari, randamentul real al rachetei devine destul de mic. De exemplu, dacă racheta cu viteza de curgere $v=2km/s$ atinge a doua viteză cosmică $v_k=11{,}2km/s$, atunci $\eta=0{,}116\eta_0$, şi respectiv $0{,}884\eta_0$ din energia totală a rachetei este preluată gazele reziduale a rachetei [1, 4].

Majorarea vitezei caracteristice a unei rachete cu mai multe trepte faţă de viteza rachetei cu o singură treaptă, cu aceeaşi masă la start şi cu aceleaşi rezerve de combustibil şi oxidant, se datoreşte micşorării masei construcţiei pe măsura arderii combustibilului.

În prezent se lucrează intens în direcţia elaborării a noi tipuri de motoare reactive care se deosebesc principial de motoarele reactive cu combustibil lichid, utilizând energia chimică a combustibilului. Se proiectează motoare-rachetă nucleare în care substanţa de lucru se încălzeşte într-un reactor nuclear, apoi este expulzată prin duza rachetei. Astfel se presupune o majorare considerabilă a vitezei de expulzare. O majorare şi mai însemnată a acestei viteze se presupune în motoarele-rachetă ionice. Aici forţa reactivă de tracţiune apare ca rezultat al expulzării din motor a particulelor încărcate – ionilor, care în prealabil sunt acceleraţi într-un câmp electric până la viteze de sute şi chiar mii de kilometri pe secundă. Însă forţa de tracţiune a motorului-rachetă ionic $F_T$ = u|dm/dr| nu poate fi majorată considerabil, dat fiind că debitul de masă pe secundă |dm/dr|, egal numeric cu masa tuturor ionilor generaţi în motor şi expulzaţi din el într-o secundă, este foarte mic [5].

Pentru lansarea rachetei de pe suprafaţa Pământului este necesar un motor, forţa de tracţiune a căruia să fie mai mare decât forţa de greutate a rachetei la start. De aceea motorul-rachetă ionic e inutilizabil la lansarea rachetei de pe Pământ. În schimb el poate fi utilizat cu succes la accelerarea rachetei şi la dirijarea mişcării ei în spaţiul cosmic departe de corpurile cereşti, adică atunci când forţa rezultantă de atracţie a rachetei din partea acestor corpuri este mică. Consumul redus de masă la funcţionarea motoarelor ionice permite majorarea greutăţilor utile şi a duratei de funcţionare a motorului ionic în comparaţie cu motorul reactiv cu combustibil lichid.

**3.Concluzii**. Din punct de vedere teoretic se consideră mai perfect propulsorul fotonic. Tracţiunea unui astfel de motor se obţine pe contul reculului la iradierea electromagnetică, adică pe contul emisiunii fotonilor, viteza cărora ajunge la valoarea maxim posibilă, egală cu viteza luminii în vid. Totuşi, construcţia de propulsoare fotonice, probabil, nu ţine de un viitor apropiat. Datorită tracţiunii mici propulsorul fotonic poate să-şi găsească aplicarea în viitor la zborurile cosmice de cursă lungă în cîmpuri gravitaţionale suficient de slabe [6].

***Bibliografie:***


1. *Бялко, А.В., Коэффициент полезного действия ракеты. В: Квант, 1973, Nr.2, с. 35-38;*
2. *Осятинский, С.Д., Румшинский, Л.З., Экспонента. В: Квант, 1972, Nr.12, с. 19-25;*
3. *Стасенко А. Л., Физические основы полета. М.: Бюро Квантум, 2005. 256 с.*
4. *Охоцимский, Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г., Основы механики космического полета М.: Наука, 1990. 342 с.*
5. *Ланге, В., Сколько стоит запуск спутника. В: Квант, 2002, Nr. 5, с. 30-31.*
6. *Detlaf, A.A., Iavorski, B.M. Curs de fizică. Ch.: Lumina, 1991. 606 p.*