CZU 51(072.3)

ASUPRA UNOR ECUAȚII DIOFANTICE

Tatiana POPOVICI, *lect. univ.*,
Universitatea de Stat „Alecu Russo” din Bălți

Summary: *The article examines some processes to solve Diophantine equations of higher degree Diophantine equations, linear two and three variables. It suggests the method* *of solving linear Diophantine equations with n variables through successive reduction of the number of variables. Various situations are studied in that equation admit solutions, possesses a solution or an infinity of solutions of a certain form.*

Key-words: *algebraic equation of higher order equation, Diophantine equation, linear Diophantine equation, homogeneous Diophantine equation, quadratic Diophantine equation.*

1. Noțiuni generale

Ecuațiile diofantice reprezintă una dintre cele mai vechi clase de ecuații, denumirea cărora provine de la părintele algebrei, Diofant din Alexandria. În lucrarea *Aritmetica,* Diofant a efectuat o clasificare a ecuațiilor nedeterminate pe mulțimea numerelor naturale, însă nu a dat o metodă generală de rezolvare a acestora, ci doar a explicat diverse procedee de rezolvare a unor ecuații concrete. Analizînd *Aritmetica* lui Diofant, Pierre Farmat a expus conjunctura: „Orice număr natural se poate exprima sub formă de sumă a cel mult patru pătrate”. De rezolvarea acestei conjucturi s-au ocupat vestiți matematicieni, precum: Euller, Lagrange, Legendre, Gauss ș.a. (Bratu 2006: 3) și, în rezultat, au fost rezolvate o clasă întreagă de ecuații diofantice.

Deseori, în viața reală, apar o serie de probleme ce se reduc la rezolvarea unei ecuații nedeterminate, precum ar fi problema chineză despre resturi: „Să se afle numerele care fiind împărțite la 3 dau restul 2, fiind împărțite la 5 dau restul 3, iar fiind împărțite la 7 dau restul 2.” Această problemă este tratată în matematica contemporană din diverse puncte de vedere: în teoria grupurilor, din punct de vedere al divizorilor normali; în teoria inelelor, din punct de vedere al idealelor; în algebrelele universale, din punct de vedere al congruențelor.

O serie de metode utilizate la rezolvarea acestor ecuații, implică utilizarea relației de divizibilitate pe mulțimea numerelor naturale (întregi). Curriculumul gimnazial (Ceapa 2010: 12, 16, 17) prevede rezolvarea unor ecuații pe mulțimea numerelor naturale începînd cu clasa a V-a. În clasa a șasea, se continuă studiul ecuațiilor pe mulțimea numerelor naturale (întregi) cu introducerea noțiunii de divizibilitate, a unor proprietăți ale relației. Este evident că, la această etapă, sînt studiate ecuațiile liniare cu o necunoscută, care reprezintă cel mai simplu caz al ecuației diofantice.

Cu toate acestea, ecuațiile diofantice reprezintă o clasă de ecuații care se întîlnesc suficient de des în cadrul olimpiadelor de matematică. De exemplu, la olimpiada raională din 11 februarie 2012, pentru clasa a VIII-a a fost propusă ecuația

$$(x+y)+(x-y)+xy+\frac{x}{y}=2012, x, y \in Z^*$$

care reprezintă o ecuație diofantică de ordinul trei ce poate fi rezolvată prin metoda descompunerii în factori. În rezultat, ecuația se reduce la rezolvarea unui sistem de două ecuații, una de variabilă x și cealaltă o ecuație pătrată față de variabila y.

$$\begin{cases} x=p, \\ 2+y+\dfrac{1}{y}=q, \end{cases}$$

unde $pq=2012$. Următoarea etapă în rezolvarea ecuației presupune descompunerea numărului 2012 în produs de doi factori și de considerat toate variantele posibile.

Cazuri mai avansate ale ecuațiilor diofantice sînt studiate predominant în cursul universitar de teorie a numerelor și anume sînt studiate ecuațiile diofantice liniare cu două necunoscute din punct de vedere al congruențelor de ordinul întîi (Bucătaru 2011, Chirteș 2010). La fel, în cursul universitar, sînt studiate unele clase de ecuații diofantice de ordinul doi de o anumită formă, precum ecuația pitagoreică, ecuația lui

Pell (Bratu 2006: 21). Studiul ecuațiilor diofantice de ordinul doi a fost efectuat de o serie de matematicieni, precum Molea Gh., Stanciu N., Серпинский В.

În continuare, vor fi analizate unele clase de ecuații diofantice, ce admit un algoritm strict de rezolvare.

În caz general, ecuația diofantică se definește astfel:

Definiție. Ecuația algebrică cu coeficienți întregi

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \tag{1}$$

unde $x_1, x_2, \dots, x_n \in Z$ se numește ecuație diofantică de n variabile. (competitiva: 2) De exemplu, ecuația

$$3x + 5y = 11, \qquad x, y \in N$$

care este o ecuație diofantică liniară de două variabile, iar ecuația de forma

$$x^2 - Dy^2 = a, \qquad a, D \in Z$$

reprezintă o ecuație diofantică de ordinul doi, cunoscută și ca ecuația lui Pell (Bratu 2006: 8).

În cadrul cercetării ecuațiilor diofantice, de regulă, se abordează următoarele întrebări:

1. admite ecuația dată soluții întregi (naturale);
2. este finită sau infinită mulțimea soluțiilor acestei ecuații;
3. să se determine toate soluțiile întregi (naturale) ale ecuației.

Este de remarcat faptul că ecuațiile diofantice nu sînt studiate pe deplin, ci doar cazuri separate ale diferitor tipuri de ecuații.

2. Ecuații diofantice de ordin superior cu o necunoscută

Unica clasă de ecuații diofantice studiate complet este clasa ecuațiilor algebrice de ordin superior cu o necunoscută. Modalitatea de rezolvare a acestor ecuații este redată de următoarea **Teoremă.** Dacă ecuația

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{2}$$

admite soluții pe mulțimea numerelor întregi, atunci aceste soluții se află printre divizorii termenului liber (competitiva: 3).

Astfel, pentru a determina soluțiile întregi ale ecuației (2) este necesar de determinat mulțimea divizorilor termenului liber (D_{a_0}), apoi prin verificări succesive, de selectat soluțiile ecuației.

Exemplu. Determinați soluțiile întregi ale ecuației

$$6x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4 = 0$$

Soluție. Ecuația dată reprezintă o ecuație diofantică de gradul 4. În baza teoremei de mai sus, determinăm mulțimea divizorilor termenului liber:

$$D_4 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$$

Verificăm, succesiv, fiecare element al mulțimii D_4 pentru a stabili soluțiile ecuației. Pentru comoditate, organizăm datele în următorul tabel:

α	$6x^4$	$-5x^3$	$-15x^2$	4	$P(\alpha)$	Concluzie
-4	1536	320	-240	4	1620	Nu este soluție
-2	96	40	-60	4	80	Nu este soluție
-1	6	5	-15	4	0	Este soluție
1	6	-5	15	4	20	Nu este soluție
2	96	-40	-60	4	0	Este soluție
4	1536	-320	-240	4	980	Nu este soluție

Răspuns. Soluțiile întregi ale ecuației sînt $\{-1, 2\}$.

3. Ecuații diofantice liniare

3.1. Ecuații diofantice liniare cu două variabile

Un caz particular al ecuației diofantice reprezintă ecuația liniară cu două variabile. Adică, ecuația de forma

$$ax + by + c = 0 \tag{3}$$

unde $x, y \in Z$ se numește ecuație diofantică de ordinul unu cu două variabile.
Dacă $c = 0$, atunci ecuația (3) se numește ecuație omogenă.

Teoremă (Фалин 2008: 5). Soluția ecuației

$$ax + by = 0 \tag{4}$$

este $x = bt, y = -at, t \in Z$, unde t este ordinul soluției.

Exemplu. Rezolvați pe Z ecuația

$$2x + 7y = 0.$$

Soluție. În baza relație (4), obținem soluția ecuației în forma

$$x = 7t, y = -2t.$$

Adică ecuația posedă o infinitate de soluții, spre exemplu

$$\dots, (-14, 4), (-7, 2), (0, 0), (7, -2), \dots$$

Răspuns. $\{(7t, -2t) | t \in Z\}$.

Exemplu. Determinați soluțiile întregi ale ecuației

$$x^2 + 3y^2 + 41z^2 + 2xy - 6xz + 10yz = 0$$

Soluție. Cu toate că la prima vedere, ecuația reprezintă o ecuație pătrată de trei variabile, ea reprezintă o ecuație diofantică reductibilă la o ecuație liniară omogenă cu două variabile. De aceea, privim ecuația inițială drept o ecuație pătrată față de variabila x.

$$x^2 + 2x(y - 3y) + (3y^2 + 10yz + 41z^2) = 0$$

Atunci

$$D = 4(y - 3z)^2 - 4(3y^2 + 10yz + 41z^2) = -8(y + 4z)^2$$

Pentru ca ecuația inițială să posede soluții pe mulțimea numerelor întregi, este necesar ca discriminantul ecuației să fie nenegativ, ceea ce este posibil doar pentru cazul cînd $y + 4z = 0$. Atunci ecuația pătrată admite o singură soluție de forma $x = 3z - y$.

În baza relației (4), soluția ecuației liniare omogene, este $x = 7t, y = -4t, t \in Z$. Substutind în expresia pentru variabila x, obținem soluția ecuației inițiale în forma

$$x = 7t, y = -4t, z = t.$$

Răspuns. $S = \{(7t, -4t, t), t \in Z\}$.

Pentru ecuația (3), sînt posibile următoarele situații:

1. Dacă a și b sînt reciproc prime, atunci ecuația posedă o infinitate de soluții de forma:

$$x = x_0 + bt, y = y_0 - at, t \in Z \tag{5}$$

iar (x_0, y_0) este o soluție particulară a ecuației (3).

2. Dacă $c.m.m.d.c.(a, b) = d$, iar c nu este divizibil prin d, atunci ecuația nu posedă soluții.

3. Dacă $c.m.m.d.c.(a, b) = d$ și c este divizibil prin d, atunci simplificăm ecuația prin d și obținem ecuația diofantică de la cazul 1.

Exemplu. Restul împărțirii unui număr la 12 este 6, iar restul împărțirii aceluiași număr la 15 este 9. Care va fi restul împărțirii acestui număr la 60?

Soluție. Fie n numărul dat. Atunci, conform teoremei împărțirii cu rest, avem că

$$n = 12x + 6$$

și

$$n = 15y + 9$$
Scăzînd parte cu parte relațiile de mai sus, obținem:
$$12x - 15y = 3$$
Simplificînd prin 3, se obține ecuația diofantică de forma
$$4x - 5y = 1$$
O soluție particulară a acestei ecuații este $(4, 3)$. Soluția ecuației neomogene va fi:
$$\{(4 + 5t, 3 + 4t), t \in Z\}$$
Atunci numărul dat are forma
$$n = 12(4 + 5t) + 6 = 60t + 54$$
Analizînd expresia obținută pentru numărul n, avem că restul împărțirii numărului inițial la 60 este 54.
Răspuns. Restul împărțirii numărului la 60 este 54.

3.2. Ecuații liniare diofantice cu n variabile.

Definiție. Ecuația liniară de forma
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad (5)$$
unde $a_i, x_i, b \in Z, i = \overline{1,n}$ se numește ecuație diofantică liniară de n variabile.
Numărul soluțiilor ecuației (5) variază în dependență de relația dintre coeficienții a_i și b.

1. Dacă numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt reciproc prime, atunci ecuația admite o infinitate de soluții.

Pentru a rezolva această ecuație, vom proceda în felul următor:

Exprimăm una dintre variabilele ecuației (5) prin celelalte și evidențiem partea întreagă. (este de remarcat că coeficienții părții întregi trebuie să fie numere întregi.) Fără a micșora generalitatea, exprimăm variabila x_1 prin celelalte variabile.
$$x_1 = \frac{b - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n}{a_1}$$
sau
$$x_1 = k + k_2x_2 + k_3x_3 + \cdots + k_nx_n + \frac{(b - a_1k) - k_2'x_2 - \cdots - k_n'x_n}{a_1}, k, k_i, k_i' \in Z$$
Deoarece $x_1 \in Z$, este necesar ca $(b - a_1k) - k_2'x_2 - \cdots - k_n'x_n$ să se dividă prin a_1. Atunci există numărul întreg y_1, astfel încît $(b - a_1k) - k_2'x_2 - \cdots - k_n'x_n = a_1y_1$. Evident că ecuația obținută este de forma ecuației inițiale, doar că lipsește variabila x_1 care este substituită deja cu variabila y_1. Din ecuația nouă exprimăm variabila x_i sub formă de combinație liniară cu coeficienți în mulțimea numerelor întregi și procedăm analog cazului precedent prin introducerea variabilei y_i. Procesul continuă pînă în momentul în care toate variabilele ecuației inițiale sînt exprimate prin variabile noi. Apoi revenind treptat la substituțiile efectuate, se determină soluția ecuației în formă generală.

Remarcă. Pentru a determina o soluție particulară a ecuației, este suficient de substituit variabilele noi prin valori concrete întregi.

Exemplu. Determinați soluțiile întregi ale ecuației
$$3x + 5y + 8z = 46$$
Soluție. Exprimăm pentru început variabila x prin celelalte variabile.
$$x = \frac{46 - 5y - 8z}{3}$$
sau

$$x = 15 - y - 2z + \frac{1 - 2y - 2z}{3}$$

Cerem acum ca fracția obținută să reprezinte un număr întreg. Atunci există numărul întreg k, astfel încît

$$1 - 2y - 2z = 3k.$$

Exprimăm din ecuația obținută variabila y:

$$y = \frac{1 - k}{2} - k - z.$$

Pentru ca y să fie un număr întreg este necesar ca k să fie un număr impar, adică

$$k = 2d + 1, d \in Z$$

Revenind treptat la transformările efectuate, obținem soluția ecuației în forma

$$(17 - z + 5d, -1 - z - d, z)$$

Răspuns. $\{(17 - z + 5d, -1 - z - d, z), z, d \in Z\}$

2. Dacă $(a_1, a_2, \dots, a_n) = d$ și $d \nmid b$, atunci ecuația nu admite soluții.

Într-adevăr, dacă $(a_1, a_2, \dots, a_n) = d$, atunci există numerele întregi $k_1, k_2, \dots, k_n$, astfel încît

$$a_1 = dk_1, a_2 = dk_2, \dots, a_n = dk_n.$$

În aceste condiții, ecuația (5) primește forma:

$$d(k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n) = b,$$

unde $(k_1, k_2, \dots, k_n) = 1$. Deoarece partea stîngă a relației de mai sus se divide prin d, iar partea stîngă nu se divide prin acest număr, reiese că ecuația (5) nu admite soluții pe mulțimea numerelor întregi.

3. Dacă $(a_1, a_2, \dots, a_n) = d$ și $b \vdots d$, atunci simplificăm ecuați a (5) prin d și revenim la cazul 1.

Un caz particular al ecuației (5), pentru cazul $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ și variabilele sînt numere naturale este studiată pe deplin în lucrarea (Popa 2009: 95). În același timp, a fost stabilită relația dintre numărul b și numărul de soluții naturale ale ecuației. Aceste ecuații au fost studiate împreună cu diverse condiții inițiale.

Astfel, pentru a rezolva o ecuație diofantică (indiferent de tipul acestea) este necesar de utilizat relația de divizibilitate pentru a putea exprima variabilele inițiale printr-un șir de variabile noi ce ar garanta existența soluțiilor ecuației inițiale și în același timp, pentru valori concrete ale variabilelor noi utilizate, variabilele inițiale primesc valori întregi.

Referințe bibliografice

1. Bucătaru Ioan. *Programa analitică la disciplina Aritmetică și combinatorică.* Iași, Universitatea „Alexandru Ioan Cuza”, 2011. Accesibil pe
2. http://www.math.uaic.ro/continut/studii/fise_disc/ML1207.pdf
3. Bratu I.N. *Disquisitiones diophanticae.* Craiova, Editura REPROGRAPH, 2006.
4. Ceapa Valentina ș.a. *MATEMATICA: Curriculum pentru învățămîntul gimnazial* (clasele V-IX). Chișinău, 2010.
5. Chirteș Florentina. *Fișa disciplinei Teoria elementară a numerelor*. 2010.
6. Popa V.M. *Aspecte combinatoriale privind ecuația diofantică liniară cu coeficienți unitari.* Sibiu, Editura Universității „Lucian Blaga”, 2009.
7. Башмакова И. Г. *Диофант и диофантовы уравнения.* Минск, Издательство Наука, 2007.
8. Фалин Г., Фалин А. *Линейные диофантовы уравнения.* Москва, Издательство Чистые пруды, 2008.
9. http://www.math.md/school/competitiva/diofant/diofant.pdf